

パイこね変換で解明する二重振り子の運動

静岡県立浜松北高等学校

物理・化学部 2年 北嶋昇太 佐々木郁弥

鈴木皓介 竹下湧馬 他 2 名

1 動機

私たちが本研究を始めたきっかけは、最初に二重振り子に興味を持ったことから始まる。ある文献に二重振り子と呼ばれる振り子はカオス運動という非常に不規則で予測不可能な運動をすると書かれていたのだ。先に述べたように非常に規則的な運動をするはずの振り子がなぜ、二重振り子になった途端に不規則な運動をするのか。

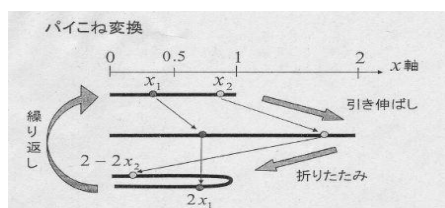
その運動の全てを解明するのは難しいかもしれないが、私たちはその特徴と原因を是非とも掴みたいと思いこのような研究をしようと決心した。

2 二重振り子とは

二重振り子とは、通常の振り子の先にもう一つの振り子を連結したもの。振り子を一旦揺らすと、カオスと呼ばれる極めて複雑で予測不能な非周期的な動きをすることで知られている。身近なカオス運動をする物体として知られており、よく演示実験などで使われる。また、カオスに関連して初期値鋭敏依存性という性質を持っており、これは運動開始時の僅かな質量、角度、エネルギーの差異によりその後の運動が大きく左右されるという性質である。

3 パイこね変換とは

今回私たちがパイコネ変換のカオス運動を説明する際に用いた理論がこのパイこね変換である。先にも述べたが、一般的に力学系カオス運動において初期値鋭敏依存性という特徴があり、これは二重振り子にもある。この初期値鋭敏依存性がカオス運動においての予測不可能性を生んでいると仮定し、その仕組みを説明したものがパイこね変換である。例えば、パイ生地内に選んだ一点がどのような動きをするか予測してみよう。このとき、パイをこねる作業には確率的要素がないため初期の点の位置が正確に分かれれば、その後の位置は容易に知ることができる。だが、初期の点の位置に僅かな誤差が含まれていた場合、変換を何度も繰り返す度に引き伸ばしにより誤差が増幅され、最終的な点の位置が予測できなくなってしまうのだ。これが、カオス運動における予測不可能性を引き起こすパイこね変換と呼ばれるアルゴリズムだ。(左図はパイこ



ね変換を表した図)

4 実験 1

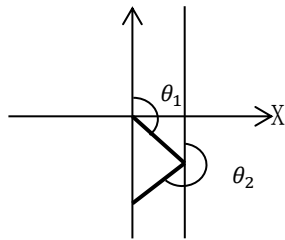
実験方法

昨年と同様に、まず、二重振り子の運動を二重振り子を伸ばした状態で真上から落とし、480fps スローカメラを用いて撮影した。

(fps…1 秒間に撮影するフレームの数 通常のテレビやパソコンは 30fps)

また、昨年は各動画を 2 分 30 秒と定めたが、動画の途中で摩擦による減衰で単振り子の運動をする事が多かったため、今年は減衰を考慮しなくてもよいように各動画時間を 1 分 30 秒とした。次に、撮影した動画を PC に取り込み、端点が y 軸を通過するときのつなぎ目と端点の xy 座標を画面上で記録した。このとき、PC 画面上の長さを測れる「測ルンです」というソフトを用いた。そして、画面上の長さを実際の長さの比から、実際の長さを導いた。その後、二重振り子の端点が Y 軸

上を通過するときについて、 θ_1, θ_2 を求めた後 0.01875 [s] または 0.025 [s] 前と後の θ_1 の大きさを導き出して、前後の Δt と $\Delta \theta_1$ から $\dot{\theta}_1$ を求めた。ここで、 Δt に差異が生じたのは、ムービーメーカーでの動画処理の問題であり、随時 Δt を記録し、それに応じ $\dot{\theta}_1$ を求めたので、分析上問題はない。

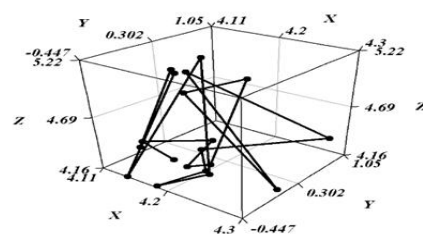
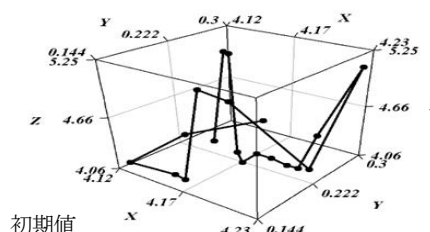
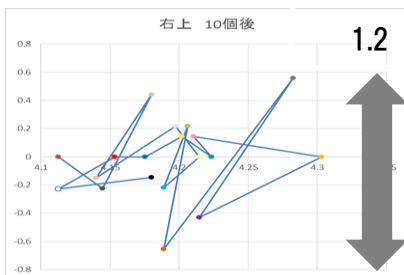
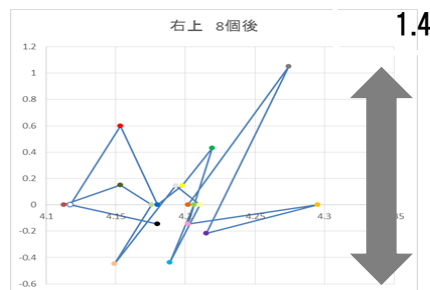
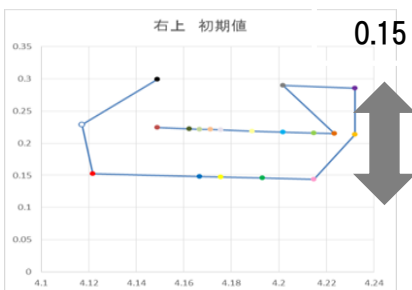


次に二重振り子の端点が図1におけるY軸上にある時の θ_1 と $\dot{\theta}_1$ の関係を示す分布図を作成する。そして、分布図から任意の円状の点の群を抽出する。ここで、0.01875 [s] または 0.025 [s] 後の $\theta_1, \dot{\theta}_1$ の値を出した。これを10回繰り返し分布図の変化を見た。さらに、 θ_1 と $\dot{\theta}_1$ の二次元ではパイコネ変換が観測しにくい場合があるため、 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2$ の三次元において「拡張→折り畳み→拡張」が観測できるかを調べた。(図は θ_1, θ_2 の定義)

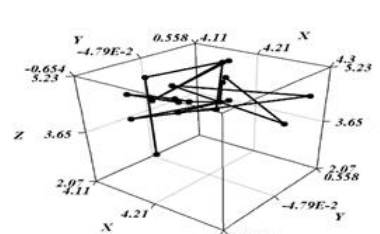
(1) 仮説

私達は二重振り子にも初期値鋭敏依存性があることから、二重振り子の予測不可能性はこの「パイコネ変換」により説明できるのではないかと考え、 θ_1 と $\dot{\theta}_1$ の分布図において「拡張→折り畳み→拡張」が観測できるのではないかと考えた。

(2) 結果 (平面グラフは横軸を θ_1 、縦軸を $\dot{\theta}_1$ とする)



8 個後



10 個後

(X 軸→ θ_1 Y 軸→ $\dot{\theta}_1$ Z 軸→ θ_2 Z 軸の幅の変化 1.19→1.06→3.16)

(3) 考察

仮説通りパイコネ変換による拡張→折り畳み→拡張が確認できただろう。根拠としては、二つのグラフは共に実時間にして約 0.3 秒という短い時間にも関わらず、縦軸及びZ軸で激しい値の幅の増加が見られること。さらに、時間が経過していくにつれ各点が不規則に動き非常に複雑なグラフ

を描いていることが挙げられる。尚、ここでは限られたデータ量しか掲載できないが実際はかなり多くのデータを得ており、その全てから同じような図形変化が観測できたことから、二重振り子の実際の運動でパイコネ変換によってカオス運動が引き起こされていることは明快に示されていると考えている。

5 実験 2

実験 1 では実際に計測した二重振り子の運動のデータを用いて、パイコネ変換が二重振り子のカオス運動を引き起こしていることを示したが、これをより一般的にするには二重振り子の運動方程式を用いて実験 1 と同様振り子の腕を伸ばした状態から落下させたときの運動をシミュレーションし、そのデータにおいてもパイコネ変換が成り立つことを示さなくてはならない。実験 2 ではこれを主な目的として実験を行った。さらに、パイコネ変換における初期値鋭敏依存性をより明快に観測するため、 θ_1, θ_2 平面における初期の図形を構成している隣接した二点間の距離を時間追跡した。

(1) 実験方法

まず、二重振り子の運動方程式を導出する。各剛体の運動方程式を用いて、二階微分方程式を求めた。

シミュレーションに用いる定数は以下の通りとする。

m_1 = 剛体 1 の質量 = 1.333 [kg]

m_2 = 剛体 2 の質量 = 0.634 [kg]

c_1 = 回転軸 o_1 から剛体 1 の重心までの距離 = 0.126 [m]

c_2 = つなぎ目 o_2 から剛体 2 の重心までの距離 = 0.109 [m]

b = o_1 からつなぎ目までの距離 = 0.246 [m]

g = 重力加速度 = 9.807 [m/s²]

また I_{o_1} , I_{G_2} はそれぞれ二重振り子を 2 つの剛体に分解して単振動させることにより、周期と慣性モーメントとの以下の関係式を用いて求めた。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgc}}$$

$$I = I_g + Mc^2$$

従って I_{o_1} , I_{G_2} は定数であり以下のようにになった。

$$I_{o_1} = 1.912 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$I_{G_2} = 0.721 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

これらを用いて各剛体に関する運動方程式を立てる。

$$I_{o_1} \ddot{\theta}_1 = Sb - (m_1 g \sin \theta_1) c_1$$

$$I_{G_2} \ddot{\theta}_2 = \{S \cos(\theta_2 - \theta_1) - T \sin(\theta_2 - \theta_1)\} c_2$$

$$m_2 \ddot{x}_{G_2} = -T \sin \theta_1 - S \cos \theta_1$$

$$m_2 \ddot{y}_{G_2} = T \cos \theta_1 - S \sin \theta_1 - m_2 g$$

(x_{G_2}, y_{G_2}) は剛体 2 の重心の xy 座標である。まず、上式の S と T を消去して次式を得る。

$$\ddot{x}_{G_2} = b(-\sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + b(\cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 + c_2(-\sin \theta_2) \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + c_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2$$

$$\ddot{y}_{G_2} = b(\cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + b(\sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 + c_2(\cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + c_2(\sin \theta_2) \ddot{\theta}_2$$

また

$$x_{G_2} = b \sin \theta_1 + c_2 \sin \theta_2$$

$$y_{G_2} = -b \cos \theta_1 - c_2 \cos \theta_2$$

そして運動方程式をシミュレーションしやすいよう、求められた二階微分方程式を連立一階微分方程式に変換する。

$$\dot{\theta}_1 = \vartheta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \vartheta_2$$

* o_1 … 回転軸 1

o_2 … 回転軸 2

G_1 … 剛体 1 の重心

G_2 … 剛体 2 の重心

* S と T はそれぞれ剛体 1 が剛体 2 から受ける力の分力である。

* I … 回転軸の周りの慣性

モーメント

M … 各剛体の質量

c … 回転軸から重心までの距離

I_g … 重心の周りの慣性

$$\dot{\theta}_1 = \frac{-m_2 b c_2 D I_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2^2 b^2 c_2^2 C D \dot{\theta}_1^2 - \{m_1 g c_1 \sin \theta_1 + m_2 g b \sin(\theta_1 + \beta)\} I_2 + m_2^2 g b c_2^2 C \sin \theta_2}{I_{1,2} I_2 - m_2^2 b^2 c_2^2 C^2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-m_2^2 b^2 c_2^2 C D \dot{\theta}_2^2 - I_{1,2} m_2 b c_2 D \dot{\theta}_1^2 - \{m_1 m_2 g b c_1 c_2 C \sin \theta_1 + m_2^2 g b^2 c_2 C \sin(\theta_1 + \beta)\} + I_{1,2} m_2 g c_2 \sin \theta_2}{m_2^2 b^2 c_2^2 C^2 - I_{1,2} I_2}$$

$$C = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$D = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

というように与えられる。このとき、角の設定は実験 1 と同じである。

次に、求めた連立一階微分方程式に差分法を用いてパソコン上でシミュレーションのプログラムを組んだ

$$\begin{aligned} \theta_1(t + \Delta t) &= \theta_1(t) + \dot{\theta}_1 \Delta t & \theta_2(t + \Delta t) &= \theta_2(t) + \dot{\theta}_2 \Delta t \\ \dot{\theta}_1(t + \Delta t) &= \dot{\theta}_1(t) + \ddot{\theta}_1 \Delta t & \dot{\theta}_2(t + \Delta t) &= \dot{\theta}_2(t) + \ddot{\theta}_2 \Delta t \end{aligned}$$

用いた言語は Excel VBA である。また、摩擦による減衰は考慮していない。そして、実験 1 で抽出した円状の群をここでも初期条件とした。その後、0.03(s)後の θ_1 $\dot{\theta}_1$ θ_2 を求め、これを 10 回繰り返し分布図の変化を見た。

また、これも θ_1 $\dot{\theta}_1$ θ_2 の三次元において「拡張→折り畳み→拡張」が観測できるのかを調べた。さらに、二次元平面のグラフにおいて、初期の距離が短かった 2 点の距離をその後も観測した。

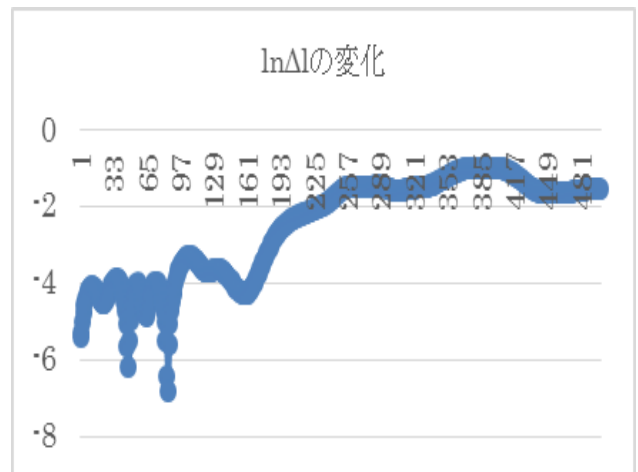
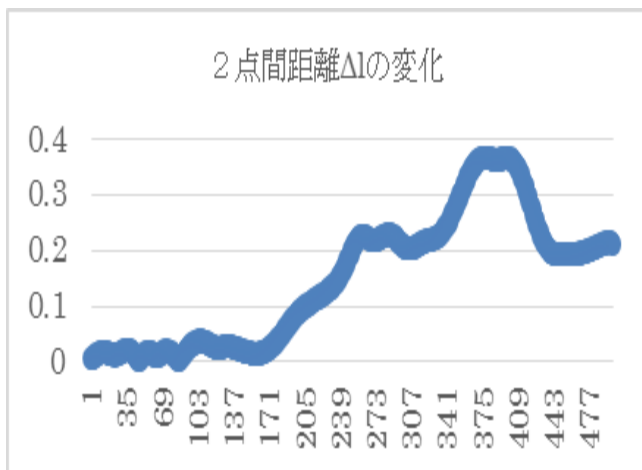
(2) 仮説

もしも、実験 1 で見られたようなパイコネ変換が二重振り子の運動で常に観測されるのならばシミュレーションにおいても同じような結果が得られるはずである。また、二次元においての 2 点間に距離の変化はパイコネ変換の「折りたたみ」により、一時的には縮む可能性が高いが全体としては 2 点間の距離は増加すると考えた。

(3) 結果

グラフの軸の単位及び初期条件は実験 1 と同じである。ただし、シミュレーションで得たグラフの数が多く、比較が困難であった。そのため、経過時間を実験 1 のグラフ間の経過時間は 0.03 秒から 0.3 秒に変更している。しかし、ここで設定した 0.3 秒も十分に小さい時間であるため、パイコネ変換を観測するにあたっての問題は発生しないと考えた。ここでは実験 1 とほとんど同じ結果を得られたため、図形の変化について詳細は述べない。

次に二点間距離の変化についてである。左のグラフの横軸はフレーム数、縦軸は Δl である。実時間に直すと、15 秒後までを観測した。右のグラフの横軸はフレーム数、縦軸は Δl の対数だ。



どちらも、はっきりと初期値鋭敏依存性が現れていることを示している。

(4) 考察

実験 2 から二重振り子のカオス運動の特徴である初期値鋭敏依存性もパイコネ変換で説明できること。

また、そのカオス運動はパイコネ変換によって引き起こされていることが証明できた。実験 1、実験 2 から二重振り子のカオス運動が発生する原因を探すという本研究の目的は達成できた。この研究が二重振り子のカオス運動の核心に触れたことは、今までの研究の集大成と言えると考えており、この場で先輩方、ご協力いただいた先生方に感謝申し上げる。

6 今後の課題

本研究はまだ核心に触れただけであり、掘めてはいないと考えている。したがって、今後は計測の効率上げ、より厳密な論理的証明を行いたい。

7 参考文献

「非線形ダイナミクスとカオス」 著 Steven H Strogatz 訳 中尾裕也 田中久陽

「コンピュータアルゴリズム」 講師 峯松信明 <http://www.gavo.t.u-tokyo.ac.jp/~mine>