

10. 自由端の紐における定常状態の観察及び考察

静岡県立富岳館高等学校

2 年次生 望月友矢、植松勇斗、小野田祐也

はじめに

本校では体育祭において、クラス全員が参加する長縄とびが行われる。その練習時クラスメイトが、腹が二つできた状態で縄を回していた。わたしはその状態を初めて見て、とても興味を持った。個人用の縄跳びを用いてすぐに再現してみた。(図 1) また、力の入れようによって腹が三つや四つの状態を作り出すことができた。このような現象は、物理における弦の振動と似ていると分かった。固定端の定常波ができている状態で、腹が二個できた状態を二倍振動、三個できたときを三倍振動と呼ぶということも知った。弦の振動現象で説明されている式を用いて、縄の回転運動も説明できることがわかった。

今度は縄を鉛直方向に垂らして下端を自由端にして回転させるところ、やはり腹ができた。一端を自由端にした振動現象の説明は弦に無く、気柱の振動で説明されている。これと比較したところ、気柱と同様に考えたのでは説明できない部分が出てきたのでより詳細に調べてみることにした。

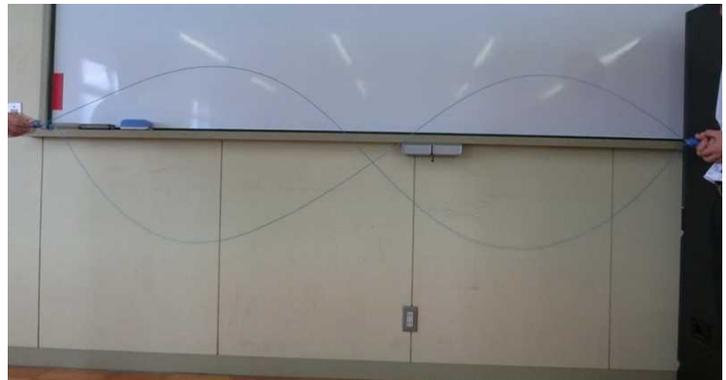


図 1

現象について

紐を鉛直方向に垂らして、下端を自由端にして回転させると図 2 のようになる。図 2 は腹と節の位置がわかるように 2 枚の画像を重ねている。また図 3 は開管の 3 倍振動の図である。

図 2 と図 3 を比較した。図 3 のように、3 倍振動は開管の長さを L (m) とすると腹と節の位置が L を 3 等分する。一方紐の方は 3 等分になっておらず、腹と節の位置が自由端側に近くなっている。さらに腹をもう 1 つ増やした状態の画像を図 4 に示す。

図 4 を見てもわかるように、本実験のひもの動きは、三角関数の描くようなカーブではなく、自由端方向に詰まった、偏った形をしている。

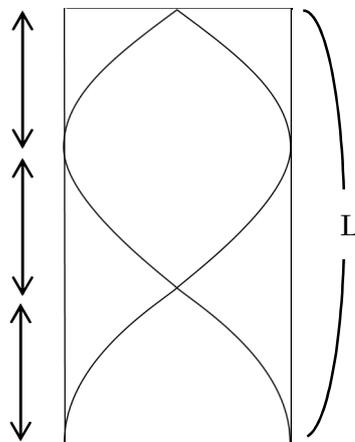


図 3



図 2

波形についての考察

この現象について考察した。前述したような偏った形になる原因について、我々はまず重力の影響を考えた。紐自体に質量がありそれが何らかの作用をしているのではと推定した。物理の波動の単元で用いられる式の中で紐の張力が関係しそうなものに波の速さの式がある ((a) 式)。

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad \dots (a)$$

ここで v は波の速さ、 S は紐の張力、 ρ は線密度。

(a) 式の張力 S は、紐の質量により、上端から下端にかけて連続的に変化している。ここで別の波の式

$$v = f\lambda \quad \dots (b)$$

についても考えてみる。ここで f は振動数(本実験の場合は回転数とする)、 λ は波長。

(b) 式より、 v が大きくなる(実験では紐の上端側)と、 f は紐の上端と下端で変わらないので、 λ が大きくなる。つまり上端に行くほど波長の大きい波形に連続的に変化していくことになる。このことから図2や図4の波形のゆがみの現象を定性的に説明できる。

次に波の式を用いて考える。波の式は

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \dots (c)$$

と与えられる。ここで A は振幅、 T は周期。

実験でできた波形は腹と節の位置が変わらないことから、進行波ではなく定常波とみることができる。そこで (c) 式から定常波の式を導く。

(c) 式を、入射波 y_1 として原点から x 軸の正の方向に進む進行波とする。原点からの距離 d (m) の位置で固定端により反射されることを考える。 d (m) の位置を通過した波を仮定すると、その通過した波を d (m) の点で折り返し、さらに変位を逆にした波が反射となるので、

$$y_2 = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2d - x}{\lambda} \right) \quad \dots (d)$$

(d) 式が反射波の式となる。

(c) 式と (d) 式を合成して定常波の式を求める。三角関数の加法定理を用いて

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= 2A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \dots (e) \end{aligned}$$

となる。

(e) 式の \cos の部分は時間変化を表す式、 \sin の部分は原点からの距離 x (m) での振幅を表す式となっている。ある瞬間の x に対する関数を知りたいので、 \cos の部分を定数と見なして、

$$y = B \sin 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \dots (f)$$

となり、定常波の x についての式が得られた。(b) 式を用いて (f) 式を変形する。



図4

$$y = B \sin 2\pi f \left(\frac{d-x}{v} \right) \quad \dots (g)$$

ここで、紐の張力が連続的に変化していることを考慮する。vは紐を伝わる波の速さで、(a) 式により与えられる。(a) 式の張力 S は x の関数なので線密度を用いて、

$$S = \rho(d-x)g \quad \dots (h)$$

(h) 式を (a) 式に代入すると、

$$v = \sqrt{(d-x)g} \quad \dots (i)$$

となる。ここで x は、ひもの上端を原点として考えていて、x の値によって張力及び速さが変わることが分かる。(i) 式を (g) 式に代入して次式が得られる。

$$y = B \sin 2\pi f \sqrt{\frac{d-x}{g}} \quad \dots (j)$$

(j) 式が、重力の影響を張力に反映させた式となる。この式に実験で得られた数値を代入してグラフを描いた(図5、図6)。ここで図5は節が1つときの実験値を、図6は節が2つときを代入したものである。式(j)において d = 1.5 として x を変化させていくと、波長に関する変数が回転数 f であることがわかる。腹が1つの時は f = 1.6 Hz、腹が2つの時は f = 2.7 Hz を代入した。x = 0 が力を加えている点で、実際には紐の上側となる。また x = 1.5 が紐の下側に当たる。

今回の計算では、固定端での反射波を考えたが、実際は自由端である。固定端として考えた理由は、x = 0 の点を固定端としたかったためである。そのため次に x = 1.5 の点を自由端と考えたときのグラフを描いた。固定端の式である (j) 式を変形し、

$$y = -B \cos 2\pi f \sqrt{\frac{d-x}{g}} \quad \dots (k)$$

の式を描いた(図7、8)。

x = 0 付近ではやはり自由端に近い形になってしまったが、x = d (1.5m) 付近では実際の波形に近い形になった。

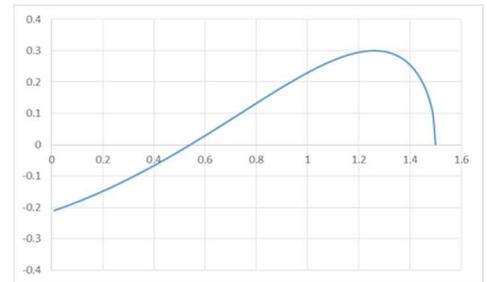


図5

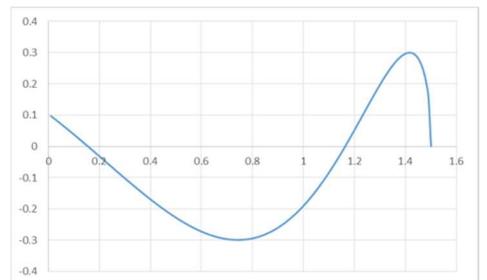


図6

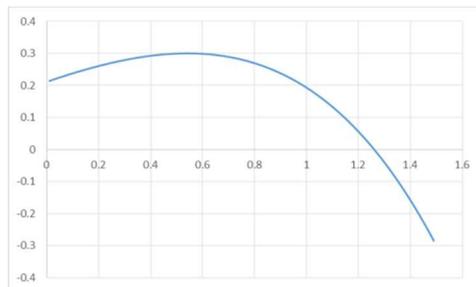


図7

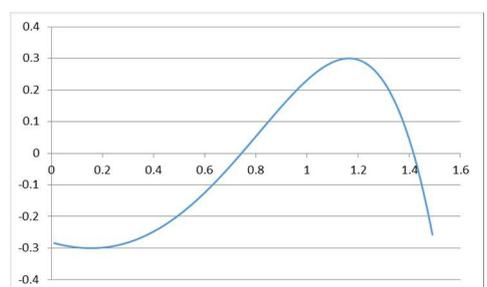


図8

ここで、図5と図7のグラフを実際の波形と比較できるように、元の図形と x 軸で反転させたものと重ね合わせて、さらに x = 0 が上になるように 90 度右へ回転させた (図9、10)。

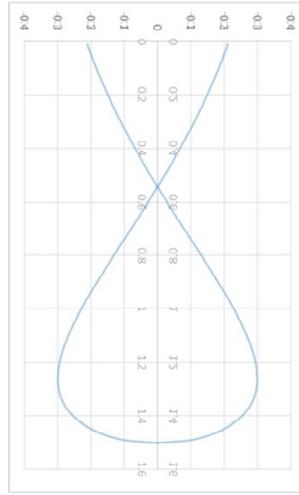


図 9

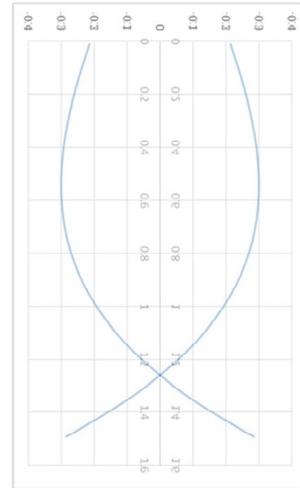


図 10

図 2 と図 9, 10 を比較すると、 $x = 1.5$ (m) を固定端として反射させた波形である図 9 は腹が 1 つある点は共通だが、やはり端の部分が異なっている。一方図 10 は端の部分は図 2 と似ているが、 $x = 0$ の点では実際と異なっている。

そこで、図 5 と図 7 の結果を重ね合わせてグラフを描き、それを図 9, 10 と同様の処理をした (図 11)。

得られた波形は、より実際の波形に近い形を得ることができた。図 11 の波の式は式(j)と(k)を重ね合わせたもので、次式を得た。

$$y = B \sin 2\pi f \sqrt{\frac{d-x}{g}} - B \cos 2\pi f \sqrt{\frac{d-x}{g}} \quad \dots (l)$$

図 11

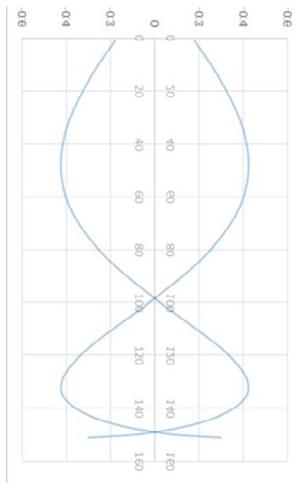
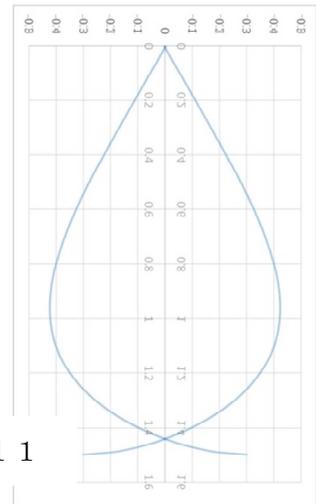


図 12



(l)式を用いて、腹が二つのときのグラフを描いた (図 12)。やはり実際と近い形を得ることができたが、 $x=0$ の点付近の形状に疑問が残った。

今後さらに工夫を加えて、 $x = 0$ では固定端、 $x = d$ で自由端になるようなグラフを描けるようにして、実際の波形と比較していきたい。

このように、紐自体の質量が影響を及ぼした結果、波形が歪む現象についての説明をすることができた。

・高速回転

3倍回転と5倍回転の実験を行っているとき、入力する力を大きくすると回転数が上がることが分かった。円錐振り子や単振り子は、周期や振動数は紐の長さのみによることが式からも分かっている。そういうものであると理解していたので、回転数が大きくなったことが不思議に感じた。一方、基本回転

では、回転数を上げることは難しかった。回転する力を加えてもうまく回転しない。

3倍、5倍回転について解析を行った。図13が3倍、図14が5倍の高速回転である。2つの図を見てわかることは、波長が小さくなっていることである。回転数が大きくなる一方で波長が小さくなる。これにより、波の速さは一定に保

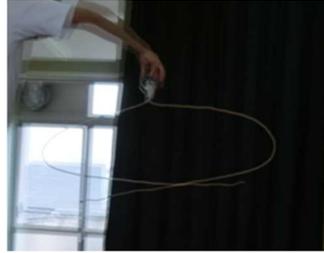


図13

たれていると考えた。波の速さは (i) 式より原点からの距離 x の関数となっているので、回転数が上がっても速さは影響しないはずである。この考えをもとにして速さを求めた。(図15)

図15より、得られた波の速さの値は、(i) 式から求めた計算値に近い値となった。これにより、回転数が大きくなる現象は波長が小さくなることにより説明ができた。

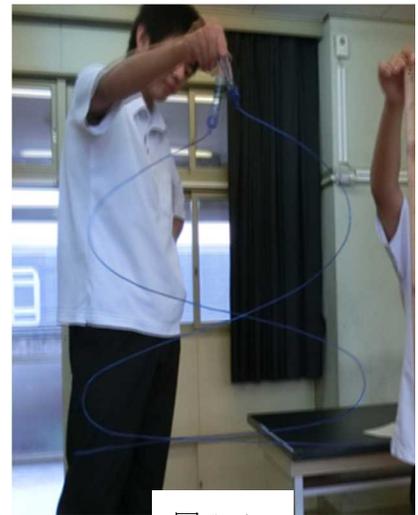


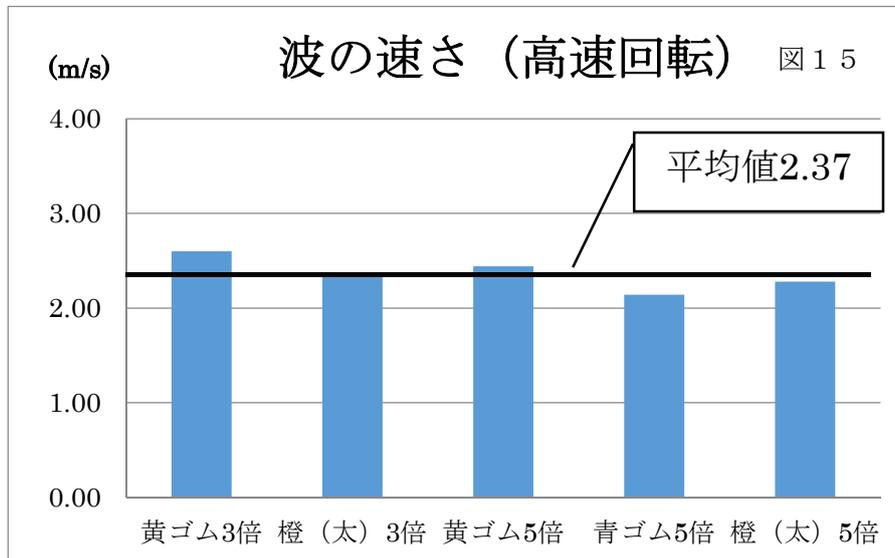
図14

また基本回転については、波長を小さくすることができないため高速回転させることは難しいのではないかと考えられる。

結果

紐において一端を自由端にした状態の、回転運動の定常状態について調べた。

- ・下端に向かうにつれて波形が偏った形になる原因について考察した。定常波の式に



ついて、重力の影響を考慮した変形を施した。紐の一端を固定端にした場合と自由端にした場合とそれぞれ比較を行った結果、両者を重ね合わせたときが実際の波形に最も近い形が得られた。

- ・回転数が大きくなる現象は波長が小さくなることにより波の速さが一定に保たれており、3倍、5倍回転の回転数が大きくなる現象について説明することができた。また基本回転については、波長を小さくすることができないため高速回転させることは難しいのではないかと考えられる。

最後に

今回、紐を回転させることによる定常状態の解析を行った。調べ始めた当初、物理の振動現象に似ているが、弦の自由端の定常状態について解説しているものがないのでとても興味を持った。調べていくうちに回転運動だが、やはり振動現象と同様の式を用いて説明できることが分かり、振動現象についての理解も深めることができ、非常に有意義な研究とすることができた。

インターネットを用いて振動現象を調べているうちに、一端を自由にした振動現象について、建築工学の分野で似た現象を説明しているものがあった。片持ち梁というものである。これについて文献を調べ、ぜひ本研究と比較してみたいと考えている。