

## 10. ポアンカレ写像による二重振り子の研究

静岡県立浜松北高等学校

物理・化学部 2年 村石悠真 他 5名

### 1 序章

#### (1) はじめに

振り子というものは一般にガリレオ・ガリレイに代表される振り子の等時性のように、あらゆる抵抗力を除いた場合、非常に規則的な運動をすることで知られている。その原理を利用したものに、振り子時計や、地震計などがある。その技術は、我々の現代の生活の基盤や、支えとなって活かされていることは間違いないだろう。振り子時計や、地震計などの研究をするわけではないが、我々の生活を支えている振り子というものはどのようなものなのか、非常に興味をもって、振り子に目をつけた。その中でも、特に二重振り子を研究の題材として扱っている。そもそも二重振り子は、振り子時計や地震計に利用されている単振り子とは特に運動の様子においてまったく異なっている。二重振り子はカオス系力学として予測不能な運動をすることで知られているが、本当にそうであるのか。我々はそれに非常に疑問を持った。二重振り子はカオス理論で説明される剛体であるため、全貌の解明は難しいと思う。しかし、仮に本当にカオスな運動を展開するとした場合、二重振り子の運動の特徴をなんらかの形でとらえてみたいと思った。

#### (2) そもそも二重振り子とは？

二重振り子は振り子の先にもうひとつの振り子を連結したもの。振り子を一旦揺らすと、カオスと呼ばれる極めて複雑で非周期的な運動が発生することで知られている。実物を比較的手軽に製作可能なことから、カオス現象の紹介や入門としての演示実験によく使用される。(Wikipedia より引用) また二重振り子は初期値鋭敏依存性と呼ばれる性質があり、運動開始時の質量や、座量の少しの違いによって、大きくその後の運動が変化してしまう性質がある。

#### (3) 昨年度の研究について

昨年度の研究では二重振り子を視認したときにあらわれる特徴的な運動「二重振り子を静止させたときに下にある腕(=下の腕)が二本の腕のつなぎ目を中心として回転する」を目測によって調べてみた。目測とは「運動が停止するまでに何回転したか」といったものである。しかし、第1項に掲載した昨年度の振り子はカオスな性質を調べるうえであまりに摩擦が大きかったため回転数が多くなればなるほど摩擦による仕事が大きくなった。これは通常の剛体の運動と同様の運動であり、カオス系力学としての特徴ではない。昨年度の研究はただ目で見て分かる運動を数値化したに過ぎなかったのである。

## 2 本研究の目的

昨年度の研究においては初動的なものとして試験的に視覚のみに頼った研究を行った。昨年度の目測による研究の中に二重振り子のカオス運動の特徴を捉えることはできなかった。本年度の研究では今まで

の研究で改良された二重振り子を利用して、計測精度を向上させたい。えで他面的・多角的に運動の解析を試みることにした。

さらに、昨年度とは異なり、実験の過程にコンピュータを利用して数値などの記録を行ったり、計測された数値の処理を行ったりすることで、包括的な実験精度の向上を図ることにした。

## 3 実験方法①

二重振り子の運動を正確に把握するには二重振り子の2本の腕のつなぎ目と振り子の端点の位置を把握することが大事であると考えた。それぞれの点の位置関係を数値的に表すことである瞬間の二重振り子の状態を一意に決めることができるからだ。よって以下の方法を行った。

- (1) まず二重振り子の運動を240fps スローカメラを用いて撮影を行った。なおその後の数値処理の便宜上1回の動画の撮影時間は10秒とした。今回使用した二重振り子は昨年度の簡易二重振り子に比べて、運動の精度が格段に改善されているため、以下に説明する動画や数値の処理の煩雑さを考慮し動画の撮影回数は10回とする。(fps...1秒間に撮影するフレームの数。通常のテレビやパソコンは30fps。すなわち10秒撮影した動画は動画処理時にPC画面上では80として秒再生されることになる。)

- (2) 次に動画を「wondershare スーパーメディア変換」を用いて処理し座標記録しやすくする。図2の通り。

- (3) (2)で処理された動画を下図のようなxy平面上で数値記録する。なお座標の記録は $\Delta t = 0.01125$  [s] ごとに行う。(縦軸...y軸、横軸...x軸) なお動画上の長さを実際の長さに変換するために図2の変換プログラムを作成して、精度の向上に努めた。

- (4) 計測された座標値から、つなぎ目と端点の座標情報から各腕の重心の座標や、つなぎ目、端点、上下の腕の重心のある時間tでの速さ、図3に示した角度 $\theta$ の値を計算し、二重振り子の運動の各要素を数値化した。なお座標変位の記録は $0.01125$  [s] ごとに行い、速度を求めるときは求めるtの $0.01125$  [s] 前のデータを利用し、座標変位を $\Delta t$ で割る。

- (5) 数値化されたデータを、時間変位で数値の変動をグラフ化して考察を行う。

## 4 考察

得られたデータを詳しく解析することで潜在的な性質の解明を行う。「保存系のカオス」という文献を参考に二重振り子をはじめとするカオス系力学はポアンカレ写像

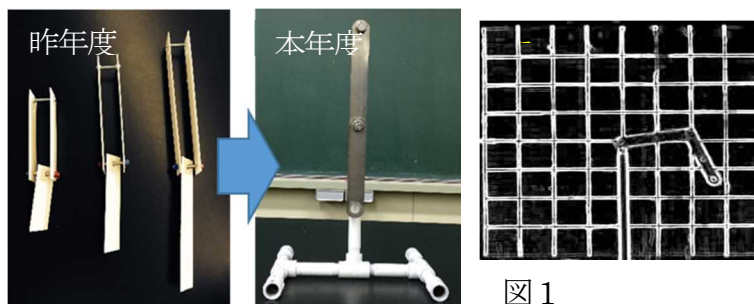
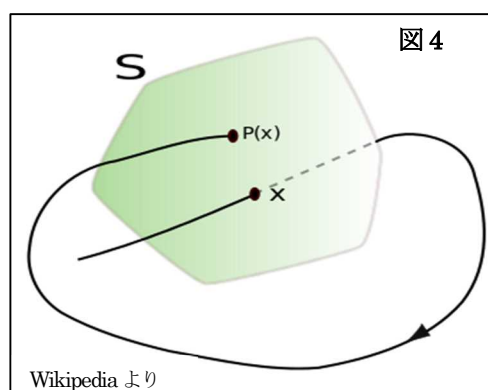
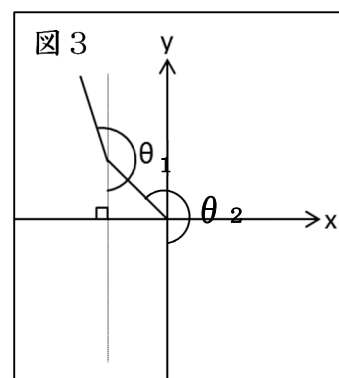
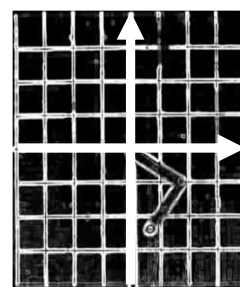
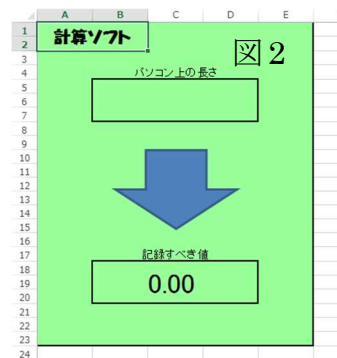


図1



Wikipedia より

という手法を用いて運動を解析することが多いということを知った。表面的な運動の展開をみるものではないため今我々が求めているものに合致する可能性があると考えてポアンカレ写像に取り組むことにした。

## 5 ポアンカレ写像

二重振り子のある一瞬の状況は図 2~3 に示す  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  で一意に決めることが出来る。ただし  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  はそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  の時間微分である。長さやそれぞれの部位が分かっている状況下では波線部の値が分かっているならば剛体のエネルギーの大きさ  $P$  を決定することができる。ここでこの  $P$  が決定している条件において、波線部の三つの値が分かっているならば、残り一つの値も一意に決めることが出来ることは明らかである。よってエネルギーの大きさを  $P$  と仮定したときに二重振り子の運動は実質的に三つの値でただ一つに決められるのである。たとえば今回の実験において波線部の値のうち  $\dot{\theta}_2$  を求める値として考え、残り三つの要素を選んで  $x, y, z$  とし、それぞれ  $(x, y, z) = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$  とし、三次元  $x, y, z$  空間上でそれぞれの量が描く曲線  $Q$  を考える。(図 4 の通り) 以下説明に図 4 を用いる。ここで  $\theta_1=0$  の時の平面  $S$  を考える。曲線  $Q$  が平面  $S$  を通る時、通った断面について注目する。ここで  $t=0$  の時の空間上の座標を  $x$  とする。  $x$  は曲線  $Q$  を平面  $S$  で切った断面である。時間  $t$  が図 4 中の  $\rightarrow$  の方向に変位していくとき、次に平面  $S$  を通る時は図より  $P(x)$  である。  $P(x)$  も  $x$  と同様に曲線  $Q$  が平面  $S$  を横切る点である。このように運動を決定づける三つの量のうち一つを固定することでできた平面  $S$  と曲線  $Q$  を切った断面を時間変位で追跡し断面の様子を観察するのがポアンカレ写像である。

## 6 実験方法②

$\theta_1=0$  の平面を通過するときについて  $0.01125$  [s] 前と後の  $\dot{\theta}_2$  の大きさを導き出して前後の  $\Delta t=0.0225$  [s] と  $\Delta \theta_2$  から固定された状態の時の  $\dot{\theta}_2$  を微分して  $\dot{\theta}_2$  を求める。次に  $\theta_2$  と  $\dot{\theta}_2$  の関係を示す分布図を作成する。分布図は図 4 における平面  $S$  に該当する。この際分布図上において点の集合が多数現れる。この集合のうち一部分を抽出してその集合を構成するプロットされた点ひとつひとつを時間追跡する。時間追跡とは以下のとおりである。「固定された状態から次に平面  $S$  を通るときに時間  $t$  を追跡してその時の  $\theta_2, \dot{\theta}_2$  を記録し、指定した点の集合の追跡後の点の集合を分布図に表して点の集合の様子の変化を見る。時間追跡は 1 つの点の集合あたり 3 回行う。」つまり平面  $S$  で立体  $Q$  を切った断面の様子の変化を記録するのである。

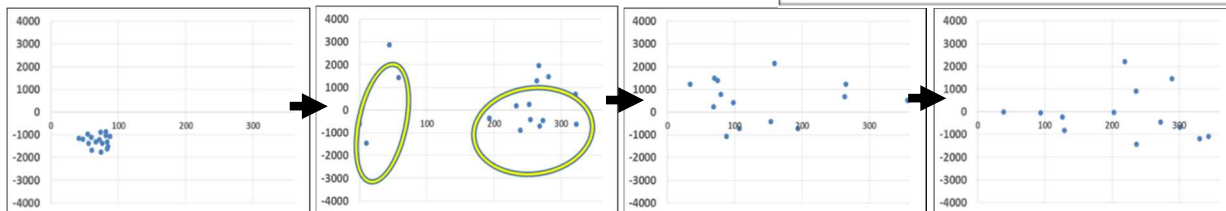
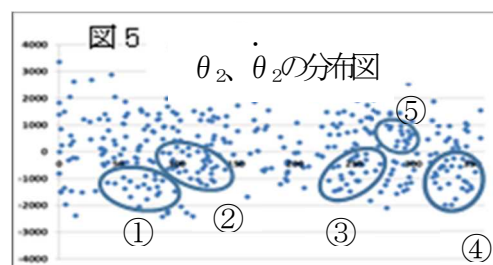
## 7 仮説

昨年度の研究でも紹介したのだがカオス系力学においては初期値鋭敏依存性という性質がある。今回のポアンカレ写像においては、物体の運動の様子を三次元空間上に表わし、平面  $S$  で固定した。すなわち第 6 項にもあるような断面の抽出方法を用いると初期条件がほぼ同じ状況が作り出される。ここで初期値鋭敏依存性というものは初期値の少しの違いによってその後の運動の様子が大きく変わってしまうというものである。ほぼ同じ状況下で平面  $S$  の固定によって抽出された初期条件はほぼ同じにしてある。通常 (カオスでない) の力学系の運動ならば初期条件がほぼ同じであればその後の運動もほぼ同様なものが予測される。しかし本論文で研究している二重振り子はカオスであるものであり、今回のような微妙な初期条件の違いが生じてしまう。このような状況下ではたとえ初期条件がほぼ同じだとしても初期値鋭敏依存性によってその後の運動が大きく変化するのではないかと考えられる。よって『平面  $S$  によって切り取られた「断面」=「点の集合」は時間追跡によって形をとどめることなく拡散してしまう』と仮説し、実験に臨むこととした。

## 8 結果

時間追跡を行った点の集合は図 5 の輪で囲まれた部分。  
例として、①の時間追跡を示す。縦軸は  $\dot{\theta}_2$ 、横軸は  $\theta_2$

## 9 対照実験について



考察する前に第 8 項で示した実験結果が二重振り子の初期値鋭敏依存性によるものであることを示すために対照実験を行った。実験方法は第 6 項に示したものと同様である。この実験では初期値鋭敏依存性を排除するために振り子の振幅を出来るだけ小さくすることで単振り子と同様の運動となるようにした。この対照実験におけるポアンカレ写像による時間追跡前の分布図の結果は図 6 のようになった。

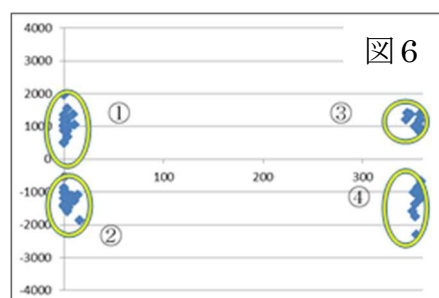
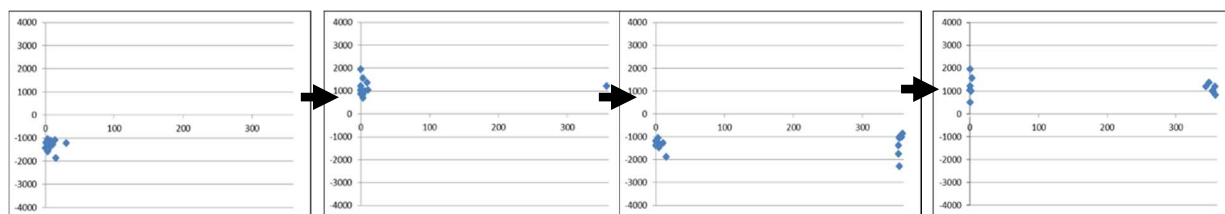


図 5 と比較したときに、図 6 に示した分布図では点がある一定区画に集まっていることが認められる。これは図 5 のように無秩序に並んでいるものとは異なっている。よって二重振り子からカオスという性質を排除した単振り子では一定の規則に従っていることが分かる。また第 6 項と同様の方法で時間追跡を行った結果以下ようになった。例として②の時間追跡を示す。



時間追跡を行ったときに点の移動の仕方が規則的であることが分かる。以上から対照実験から二重振り子によるポアンカレ写像で得られた分布図の無規則性や時間追跡後の点の拡散は初期値鋭敏依存性によるものであることが分かる。

## 10 考察

第 8 項に示した時間追跡の実験結果から分かるように、①～⑤で時間追跡を始める前は（各①～⑤1 つ目の分布図）一定区画に集まった点の集合について注目してデータを抽出した。それにもかかわらず、時間追跡を 1 回、2 回、3 回と続けていくにつれて点の集合が拡散していることが分かる。これは仮説に示したものと同様の結果である。

ここで今回の実験結果が力学系カオスから生じる初期値鋭敏依存性によるものであるのかが問題となる。これは第 9 項の対照実験の結果により示された。

今回の実験において、ある一定区画の点の集合を抽出したとはいえ、初期条件がまったく同じなわけではない。  $\theta_2$  の大きさが数度異なっている場合がほとんどである。（  $\dot{\theta}_2$  についても同様）そのために時間経過を伴う時間追跡によるポアンカレ写像を行うと初期値鋭敏依存性によって立体  $Q$  を平面  $S$  で切った断面（今回の断面は点一つ一つにあたる）は時間の経過とともに相当に散大してしまうのである。仮説どおりになった実験結果は二重振り子の代表的な運動の特徴を如実に表したものであると考えられる。潜在的な運動の特徴の解析に成功したと言える。

## 11 今後の課題

各時間追跡①～⑤の1回目の時間追跡をみると、第8項の分布図の囲まれた部分に示したように追跡前の点の集合が大きく分けて2つに分かれているように見える。2回目の時間追跡後を見るとその2つの点の集合が各々拡散していったように見える。これはあくまでそのように“見える”だけであり確証をもって言い切ることは出来ない。しかし第9項で示した「拡散」にもしかしたら何らかの法則があるのかもしれない。例えばだが「点の集合が1回の時間追跡で2つに分かれ、その分裂した2つの点の集合が次の時間追跡でまたそれぞれ2つに分かれる。以後それを繰り返す。これによって初期の点の集合が全体に散大していく」といった法則があれば実に面白いと思う。次期研究の題材にしていこうと思う。

## 12 参考文献

- ・保存系のカオス（市村 純/広岡 一）
- ・Wikipedia

