

1. 屈折率勾配を持つ溶液に等価なレンズの導出と 光線経路の明るさ

静岡県立清水東高等学校自然科学部物理班
2年 豊島洸太 他 11 名

1. 研究の目的

(1) 屈折率勾配を持つ溶液について

真水を入れた水槽の底に、シロ糖の飽和溶液を静かに注入して放置すると、時間の経過とともに、溶質であるシロ糖は水面に向かって拡散し、やがて濃度に応じて屈折率が連続的に変化した溶液ができる。このような溶液を「屈折率勾配を持つ溶液」と呼ぶ(水深の変化に対する屈折率の変化を屈折率勾配と定義する)。この溶液を通して水槽の背後に置いた物体を観察すると、蜃気楼に相当する 3 個の像が観測される。この像を上のものから順に像 A、像 B、像 C と名付け(写真 1)、研究を行ってきた。以下、屈折率勾配を持つ溶液を「溶液」と呼ぶことにする。



写真 1 3個の像

(2) 本年度の研究の目的

- ア. 屈折率勾配を持つ溶液と同等のレンズ作用を持ち、一様な物質でできたレンズ「等価レンズ」の形状を導出し、溶液と等価レンズのレンズ作用を比較する。
- イ. 溶液中の光線経路が一部の水深で明るく観測される原理を解明する。

また、昨年度までの研究から、溶液が水深に応じて 3 つの異なるレンズとして作用し、像を出現させているという解釈が得られている(図 1)。また、この溶液では、光は下側にのみ屈曲するため、凹レンズでは下半分、凸レンズでは上半分に対応している。さらに、この溶液は水平方向には屈折率勾配を持たず、鉛直方向にのみレンズ作用を持つため、図 1 では側方から見た断面図のみ考えている。このことをもとに等価レンズの断面図について以下の仮説を立てた。

仮説：等価レンズの断面図は図 2 のとおりである。断面図の曲線の上方部は下に凸、下方部は上に凸の曲線となり、それぞれが凹レンズ、凸レンズとして作用する。凸レンズの部分のうち、曲率の大きい部分では強い凸レンズ、曲率の小さい部分では弱い凸レンズとして作用する。

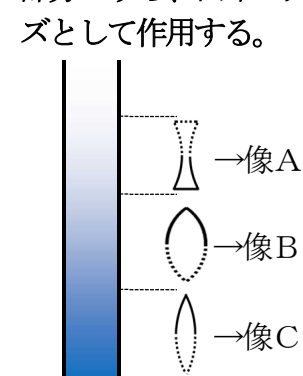


図 1 各水深に対応するレンズ

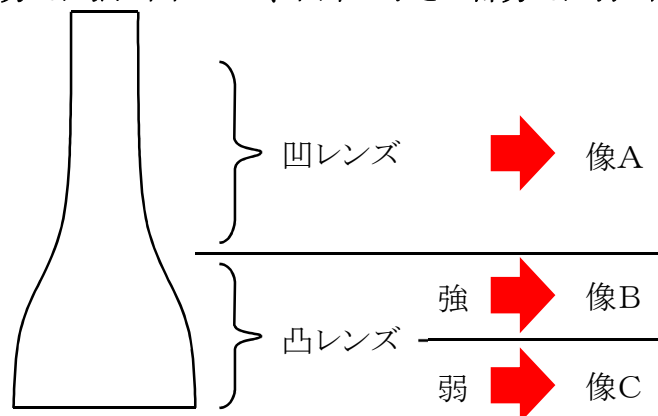


図 2 予想の断面図

2. 等価レンズの導出

等価レンズの断面図を求めるために、曲面の座標を求めることにした。光線が水槽に入るときと出るとき、観測者の位置に届くときの3点の高さを計測することで座標を求められると考えた。実際に測定をしたが、0.1mm程度の精度で光線の高さを測定する必要があり、困難であったため、光線追跡で算出した精密な値を用いることにした。

(1) 光線追跡の理論

溶液内部の屈折率分布をもとに、屈曲して進む光線の経路(図 3)を数理的に求める作業を光線追跡と呼ぶ。

水深に対する屈折率が分かれば①式から③式(式群 1)をもとに、微小区間において隣接した2点を④式と⑤式で関連づけることができる。この2式を連続的に用いることで、溶液中の光線経路が求まる。以上の理論を適用し、表計算ソフトを用いて、本年度の目的に合うプログラムを新たに自作した。

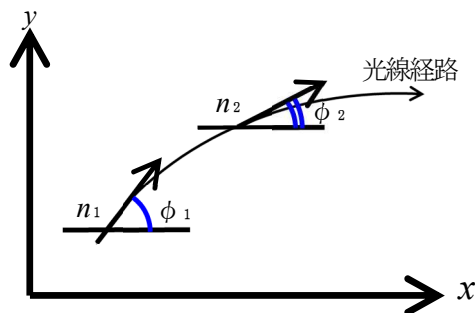


図 3 屈折率と光線の角度

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \equiv \alpha \quad \cdots ①$$

$$n(y) \cos \phi(y) = \alpha \quad \cdots ②$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi(y) \quad \cdots ③$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad \cdots ④$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \sqrt{\left(\frac{n(y_i)}{\alpha}\right)^2 - 1} \times \Delta x \quad \cdots ⑤$$

式群 1 光線追跡の理論

(2) 等価レンズの断面図の理論的導出

断面図を求めるために、等価レンズの曲面と厚さを導出した。

ア. 曲面の導出方法

高さ h_1 (以下高さは水底面からの高さを表す)、傾きの角度 θ_1 で溶液の入った水槽に入射した光線を考える (図 4)。この光線が水槽から出たときの高さ h_2 が h_1 と等しいとき、この光線の経路は水槽の中心を軸に左右対称である。ここで水槽を等価レンズに置き換える。高さ h_1 に対応する等価レンズの接線の傾きの角度を α 、等価レンズに入るときに入射角を θ_2 、屈折角を θ_3 とおくと、等価レンズも左右対称なので図 5 のようになる。空気の屈折率を 1、等価レンズの材質の屈折率を n とすると、①～③式(式群 2)が成り立ち、そこから④式が得られる。

この計算を 0mm から 120mm の全ての高さ (図 4 の h_1) に対して行うプログラムを自作し、各高さでの等価レンズの接線の傾きの角度を求めた。そして、各高さに対する接線の傾きの角度を高さについて積分することで、等価レンズの曲面を求めた。

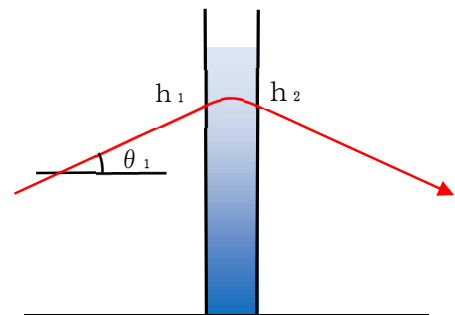


図 4 水槽に入射する光線の高さと角度

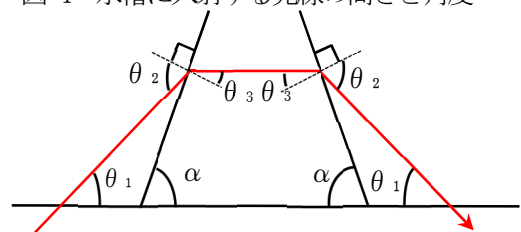


図 5 入射する光線と等価レンズの接線

$$\sin \theta_2 = n \sin \theta_3 \quad \cdots ①$$

$$\theta_1 - \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \cdots ②$$

$$\theta_3 + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ③$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{n - \cos \theta_1}{\sin \theta_1} \quad \cdots ④$$

式群 2 等価レンズの接線の傾きの角度の導出

イ. 厚さの導出方法

等価レンズのある高さでの厚さを求めれば、曲面をもとに等価レンズの断面図が決定できる。高さ 110mm では、入射した光線は水面から出ることがない。また屈折率分布の測定から、少なくとも 96 時間後まではこの水深での溶液は真水でありレンズ作用を持たないことが分かっている。つまり、この高さに対応する等価レンズの接線の傾きの角度は 90° である。このことを用いて、高さ 110mm での厚さを導出した。図 6、図 7 のように定義した各文字で①～③式(式群 3)が成り立ち、②式と③式を①式に代入することで、④式が得られる。④式を自作のプログラムに組み込み計算した。

$$\begin{aligned} d' \tan \theta_2 &= h'_2 - h'_1 \dots \text{①} \\ h'_1 &= \frac{100}{d_1} \left(d_1 + \frac{d}{2} - \frac{d'}{2} \right) + 10 \dots \text{②} \\ h'_2 &= \frac{h_3 - h_2}{d_2} \left(d_1 + \frac{d}{2} + \frac{d'}{2} - (d_1 + d + d_2) \right) + h_3 \dots \text{③} \\ d' &= \frac{d(d_1(h_2 - h_3) - 100d_2) + 2d_1d_2(h_2 - 110)}{2d_1d_2 \tan \theta_2 + d_1(h_2 - h_3) - 100d_2} \dots \text{④} \end{aligned}$$

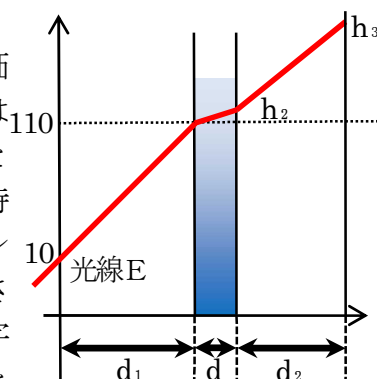


図 6 水槽と光線Eの経路

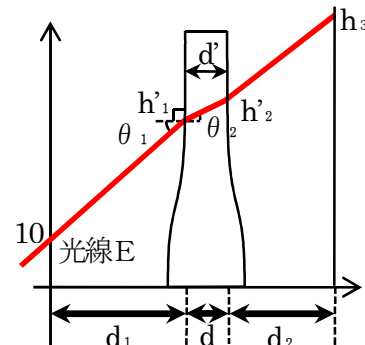
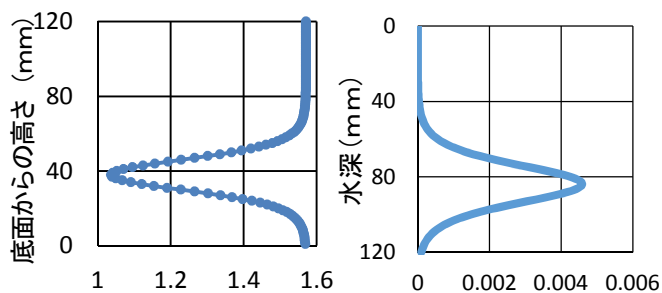


図 7 等価レンズと光線Eの経路

ウ. 結果

式群 3 等価レンズの厚さの導出

接線の傾きの角度(図 5 の α) を求めた結果はグラフ 1 のようになった。導出には測定した 24 時間後の屈折率分布を用い、レンズの材質の屈折率を代入して計算を行った。このグラフの形が屈折率勾配のグラフ(グラフ 2)に近いことから、積分することで求められる等価レンズの曲面は、屈折率分布と同様の関数型(式 1)で表すことができると考え、結果に合うように定数 A～E を決定した。決定した定数を代入し、厚さが合うように反対の曲面を追加すると図 8 のようになり、私たちの予想した等価レンズの断面図と一致することが分かった。



左側の接線の傾きの角度(rad)

グラフ 1 各高さでの α

屈折率勾配

グラフ 2 屈折率勾配

$$n(y) = \frac{D}{A + B \times e^{C(E-y)}} + 1.33$$

式 1 水深 y に対する屈折率 n(y)

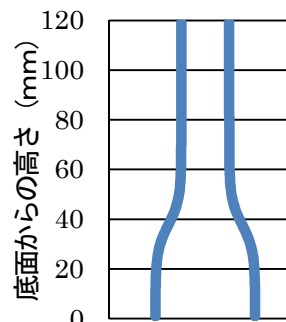


図 8 導出した等価レンズ

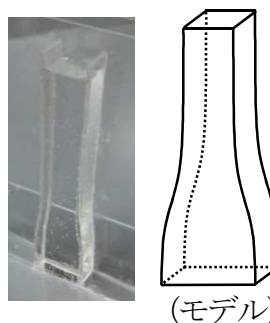
(3) 等価レンズのレンズ作用の検証

等価レンズを自作し、屈折率勾配を持つ溶液の入った水槽のレンズ作用と同等のレンズ作用を持つか検証した。今回は、溶液作成直後から 24 時間後の厚さ 20mm の水槽に対応する等価レンズを製作して、溶液と比較した。

ア. 製作方法

ガラスなどを研磨してレンズを作るのは技術的に難しいため、アクリル板を曲げて容器を作り、その中に水を入れ、「水レンズ」として製作することにした。

レンズの材質の屈折率として水の屈折率である 1.333 を代入し、自作のプログラムで求めた断面図をもとにアクリル板を曲げ、これが側面になるようにアクリル板を接着し、水槽の形にした(写真 2)。



(モデル)

写真 2 製作した等価レンズ

イ. 検証結果

等価レンズを通して物体を観察すると、3 個の像が観測された。屈折率勾配を持つ溶液を通して観測された像と比較すると写真 3 のようになった。像の出現位置を測定した結果は、図 9 のようになった。対応する水槽の観測者側の面を基準とすると、物体の位置は 500mm 前方(図の左側)、観測者の位置は 1000mm 後方(図の右側)の位置である。像 A は等価レンズと物体の間、像 B は等価レンズの観測者側、像 C は物体より遠くに出現している。出現した像の数、正逆、出現位置はすべて屈折率勾配を持つ溶液を通して観測される像と一致した。

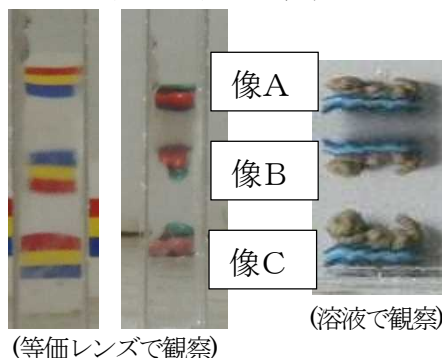


写真 3 出現した像の比較

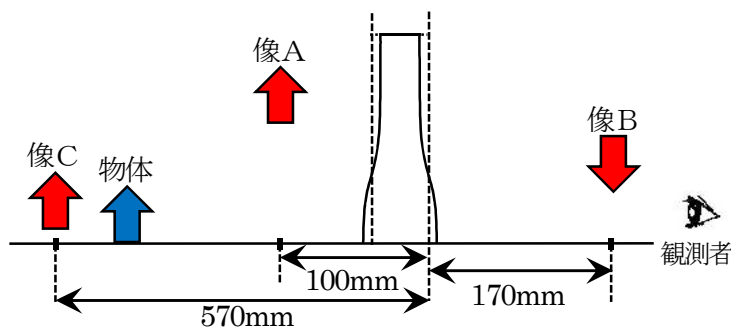


図 9 等価レンズで出現した像の位置

以上の検証結果から、私たちが計算により導出し製作した等価レンズは、溶液の入った水槽と同等のレンズ作用を持つことが分かった。このことから、屈折率勾配を持つ溶液のレンズ作用についての昨年度までの解釈が正しいことが、今回の新たな方法で再確認できた。

3. 光線経路の明るさについて

(1) 研究の動機

屈折率勾配を持つ溶液の入った水槽に、ガラス棒で鉛直方向に広げたレーザー光を入射して測定を行っていたときに、溶液中を通過するレーザー光の経路が一部の水深で目視できることに気が付いた。ショ糖分子の大きさからチンダル現象ではないことがわかる。それにもかかわらず、特定の水深部が明るく観測されることなどに興味を持ち、詳しく研究することにした。

(2) 測定方法

円筒レンズに見立てたガラス棒を通過したレーザー光を水槽に入射し、溶液中の光線経路をカメラで撮影した。

以下の各測定は、0 時間後から 24 時間おきに最大 96 時間後までの測定を 1 セットとして、厚さが 20mm の水槽で 6 セット、10mm の水槽で 4 セット行った。

(3) 測定結果

写真 4 左は、測定で撮影した写真の一例である。屈折率勾配が最も大きい水深部である水深 80mm 付近が最も明るいことが分かる。また、最も明るい水深部から上下に離れるにつれて、徐々に暗くなっているように見える。しかし、最も明るい水深付近はレンズ作用の大きい水深でもある。そこで、レンズ作用により光量が水深によって異なることを避けるため、レーザー光を広げずに各水深に入射し、合成したのが写真 4 右である。ここでも水深 80mm 付近で最も明るくなっていることから、レンズ作用の影響がなくても、水深 80mm 付近で光線経路が最も明るくなることがわかる。

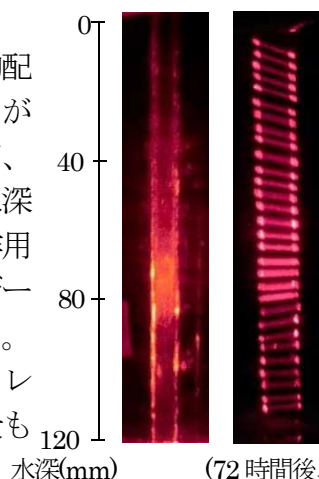
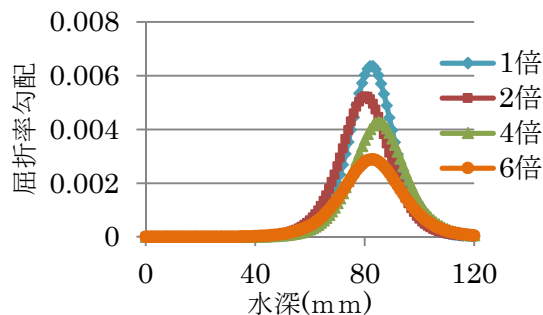


写真 4 水深による光線経路の明るさの違い

(4) 考察と検証

測定結果から、光線経路の明るさは屈折率勾配の大きさに対応していると考えられる。このことを検証するために、ショ糖の飽和溶液の代わりに、希釈したショ糖水溶液を使用した溶液を作成し(これを希釈溶液と呼ぶことにする)、屈折率勾配と光線経路の明るさを測定した。希釈溶液は飽和溶液と同体積の水を加えたものを2倍希釈溶液とし、同様に1倍、2倍、4倍、6倍の希釈溶液を用意した。希釈するにつれて、グラフ3のように屈折率勾配の大きさは小さくなり、また、写真5のように光線経路の明るさが暗くなっていることもわかる。このことから、光線経路の明るさが屈折率勾配の大きさに対応することが確認できた。



グラフ 3 希釈による屈折率勾配の変化

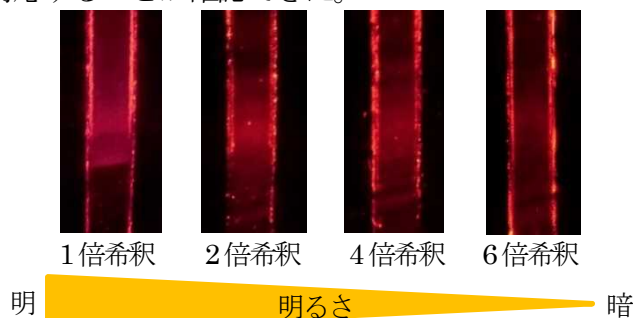


写真 5 希釈による光線経路の明るさの変化

(5) 原理の考察

光線経路の明るさが屈折率勾配の大きさに対応していることをもとに、光線経路が明るく観測される原理を考察した。

この溶液中で光線は、等屈折率面(屈折率が等しい点を三次元的に結んだ面を等屈折率面と定義する。)で屈折と反射を繰り返している。拡散の速度は位置によって微小な違いがあるため、等屈折率面はわずかなゆらぎを持った面となる。このゆらいだ面で、乱屈折・乱反射(図10)が起こり、光線の進行方向が乱れる。ここで、溶液を微小な屈折率の変化に対応する等屈折率面の集まりであると考えたと(図11)、屈折率勾配の大きな水深では屈折率が大きく変化しているため、等屈折率面が密になる。そのためこの領域では乱屈折・乱反射の影響が大きくなり、明るく観測される。

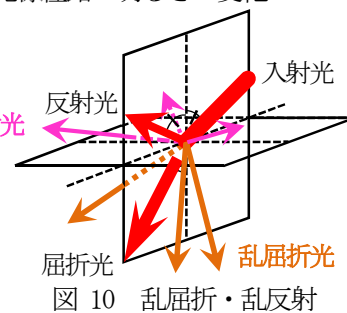


図 10 乱屈折・乱反射

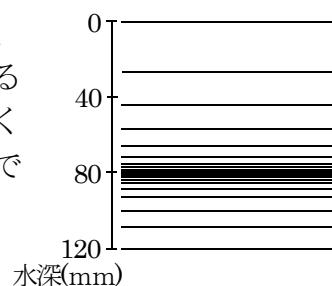


図 11 等屈折率面の密度

4. 結論

- (1) 屈折率勾配を持つ溶液の入った水槽と同等のレンズ作用を持つ等価レンズの断面図を計算で導出し、溶液のレンズ作用を再現することができた。
- (2) 製作した等価レンズからも、像Aは溶液の比較的小さい水深部の凹レンズ作用によって結像した正立虚像であることが確認できた。また、深い水深部の凸レンズ作用を示す水深のうち、上方の強い凸レンズ作用によって倒立実像である像Bが出現し、さらに深い水深の弱い凸レンズ作用によって正立虚像の像Cが出現していることも確認できた。これらの性質は昨年度までの解釈と一致しており、昨年度までの解釈を裏付けることができた。
- (3) 光線経路が見えることについては、乱屈折・乱反射で説明できることが分かった。

5. 参考文献

- (1) 屈折率勾配を持つ溶液の結像作用の研究

清水東高自然科学部 平成 26 年度理科研究論文集

- (2) 屈折率勾配を持つ溶液が示す凸レンズの作用

清水東高自然科学部 平成 25 年度理科研究論文集