

11. 質量と長さによる毎秒回転変数の変化

静岡県立浜松北高等学校 物理・化学部

1年 村石 悠真 小野 琳太郎 松尾 風雅

1 動機

振り子というものは一般にガリレオ・ガリレイに代表される振り子の等時性のよう、あらゆる抵抗力を除いた場合、非常に規則的な運動をすることで知られている。その原理を利用したものに、振り子時計や、地震計などがある。その技術は、我々の現代の生活の基盤や、支えとなって活かされていることは間違いないだろう。振り子時計や、地震計などの研究をするわけではないが、我々の生活支えている振り子というものはどのようなものなのか、非常に興味をもって、振り子に目をつけた。その中でも、特に二重振り子を研究の題材として扱っている。その理由を以下に説明したい。

まず二重振り子は、振り子時計や地震計に利用されている単振り子とは特に運動の様子においてまったく異なっている。顧問の先生に、振り子を研究材料として、相談した際に、二重振り子の存在を教えていただいた。実際にインターネットで動画を見たときに、その筆舌に尽くしがたい運動に完全に我々は魅了されてしまった。我々の学校では、一年に一度、実験を通して研究内容を紹介する機会が存在する。我々の目的としてある、“物理学に魅力を持ってもらおう”という観点において、明らかな規則性が見られ、一般的に運動の様子が知られている単振り子に比べて、二重振り子のほうが魅力的だと判断して二重振り子を題材にすることになった。

二重振り子はカオス理論で説明される剛体であるため、全貌の解明は難しいと思うが、挑戦してみたいと思った。なお、本年度の研究は、今後につなげていく基礎研究として、運動の様子の撮影を繰り返しながら、振り子につけるおもりの質量や、振り子自体の長さを変化させながら、計測していこうと思う。

なお今回の論文のテーマにもあるように“毎秒回転変数”という値がキーワードとなる。これは我々が研究において、便宜上名前を付けたのであり、中心の柱となるため、のちのち丁寧に説明しようと思う。

<二重振り子の基礎知識>

二重振り子は振り子の先にもうひとつの振り子を連結したもの。振り子を一旦揺らすと、カオスと呼ばれる極めて複雑で非周期的な運動が発生することで知られている。実物を比較的手軽に製作可能なことから、カオス現象の紹介や入門としての演示実験によく使用される。(Wikipediaより引用)

また二重振り子は初期値鋭敏依存性と呼ばれる性質があり、運動開始時の質量や、座量の少しの違いによって、大きくその後の運動が変化してしまう性質がある。

2 二重振り子の作成

今回は二重振り子の製作において、「カオスと複雑系の科学」という書籍を参考にして、二重振り子を製作した。

今回は基礎研究で長さにも注目するため、二種類の長さの二重振り子を作成した。

<材料>

プラスチック板 (幅 4cm)、鉄パイプ (外径 5mm)、鉄ねじ

プラスチック板から 4cm×10cm と 4cm×15cm と 4cm×20cm をそれぞれ 1、3、2 枚ずつ切り取る。この際、組み立て時に二重振り子の上の部分と下の部分の長さの比が二種類の長さにおいてほぼ等しくなるように (13:7) してある。なおこの



比自体には意味はない。写真にあるものが今回作成した二重振り子である。(左が:23cm、右:32cm)

3 本論文中での使用語句・定義について

本論文中において、論文自体を読みやすいものにするため以下5つのことを定義する。

振り子の最上部から最下部までの長さを l とする。よって以下、23cmを $l=23$ 、32cmを $l=32$ と記す。

第三項の最後に掲載してある写真のとおり、上のコの字型になっている振り子の腕を“上の腕”、下の部分を“下の腕”と呼ぶこととする。

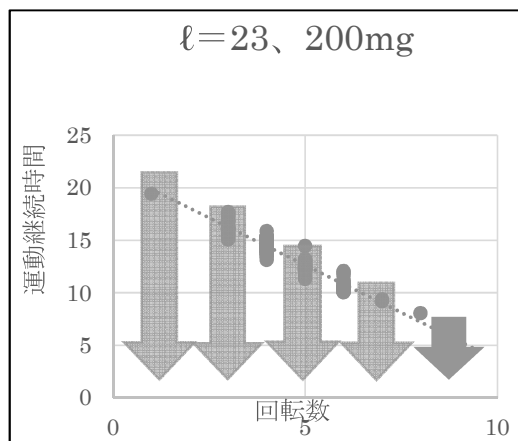
第四項で説明する実験方法における運動では、振り子を鉛直上方向に二本の腕を一直線にして、静かに手を放すことから開始される。なお今回作成した振り子は非常に軽量なため、少しの風で動く可能性があり、運動の静止を見極めることが困難であるため、下の腕が動いていたとしても、上の腕が、静止したら、それを振り子全体の静止とみなす。運動を開始してから静止するまでのかかった時間を“運動継続時間”とする。

二重振り子の特徴として、下の腕が回転するという運動がみられることから、一つの特徴としてとらえ、振り子が運動を開始してから、運動が静止するまでに下の腕が回転した回数を回転数とする。

第三項でも示したが、上の腕と下の腕の比は $l=23$ と $l=32$ でほぼ等しくしてある。(13:7)なお、今回は振り子につける質量と、長さに着目しているため、振り子の上下の腕の比自体には意味はない。質量と長さ以外の条件を出来る限り等しくするため、比を等しくした。

4 実験方法の確定

高校に入って間もない我々には基礎的な物理の知識に乏しく、そのうえカオティックな運動をする二重振り子の研究をどのように行っていくか、我々はそれを考えるために、ひたすらビデオ撮影や、目測による計測を続けた結果、当然と言えば当然になってしまうが、回転数が多ければおおいほど、運動継続時間は短くなっていくことが分かった。(下図参照)完全にすべての抵抗が排除されていない今回作成した振り子は、回転数が多ければ多いほど、振り子の運動を阻害する摩擦による仕事が大きくなってしまふのだ。しかし、二重振り子に見られる初期値鋭敏依存性によって、摩擦が影響してしまふとしても二重振り子のなんらかの特徴を反映したものになるのではないかと考えて、第五項に記す実験を行う。



5 実験方法

$l=23$ 、32において、おもりを下の腕の最下部に輪ゴムを利用してとりつける。(おもりの質量は0mg~4000mgまで変化させる)それぞれで、運動継続時間と回転数を、ビデオのスロー撮影によって計測する。今回は各条件に付き100回ずつ計測する。今回は、最初の測定を含めて約4000回計測したこととなる。

長さごと、重さごとに運動継続時間と回転数の相関図を作成する。

※当初から相関関係があることはわかっていたが、それを示すため一応相関係数を計算しておく。

相関図から近似値直線を作成し、近似値直線の傾き(これを「毎秒回転変数」と呼ぶことにする。)を各条件下(質量ごと、長さごと)における運動の特徴を示す値として利用する

測定の様子



6 毎秒回転変数について

毎秒回転変数は今回の研究の中心であるため、本項をもって以下に詳しく説明する。

毎秒回転変数とは「ある条件下（おもりの質量と長さ ℓ ）における、二重振り子の運動継続時間の変化によって総回転数がどの程度変化しやすいかをあらわす数値」である。これが定義であるが、少々分かりにくいので、実例をもって説明する。毎秒回転変数が -0.6 のとき、運動継続時間が 3 秒短くなると総回転数が 1.8 回多くなることを示している。また 毎秒回転変数が -0.6 のとき、運動継続時間が 3 秒長くなると総回転数が 1.8 回少なくなることを示している。

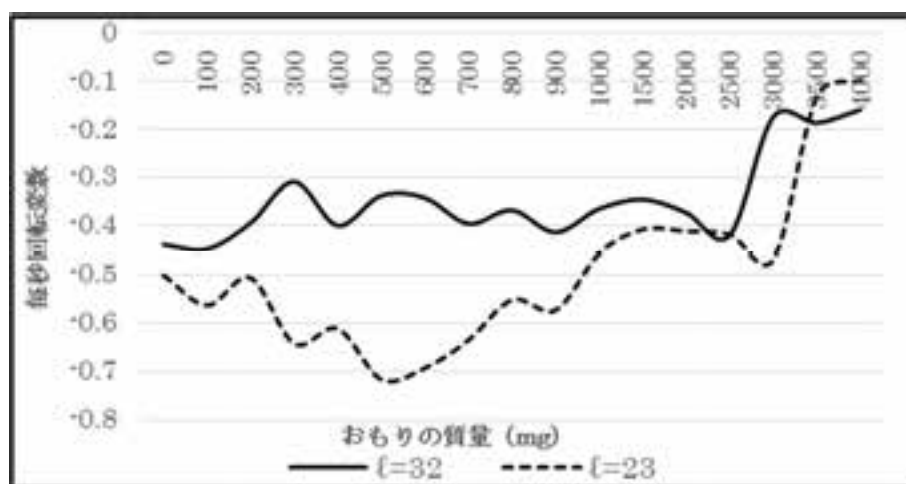
7 結果

条件を様々に変えて、それぞれの条件における毎秒改訂変数を算出し、表にすると以下のようなになる

重さ (mg)	0	100	200	300	400	500	600	700
回転数 ($\ell=32\text{cm}$)	-0.43	-0.44	-0.39	-0.30	-0.39	-0.33	-0.34	-0.39
	87	82	41	85	97	74	2	59
回転数 ($\ell=23\text{cm}$)	-0.50	-0.56	-0.50	-0.64	-0.61	-0.71	-0.69	-0.63
	05	23	57	16	06	58	19	41

800	900	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
-0.36	-0.41	-0.36	-0.34	-0.37	-0.41	-0.17	-0.18	-0.15
79	36	51	55	26	99	42	62	92
-0.55	-0.57	-0.45	-0.40	-0.41	-0.41	-0.46	-0.12	-0.09
1	23	6	68	09	76	73	88	91

※上部表の塗りつぶしがされているところは相関関係があることは認められるものの相関係数が小さいためデータの安定性が保たれていない可能性がある。これをグラフにすると下図のようになる。



8 考察

(1) 結果にあるグラフを見ると不規則なグラフの動きの中にも、グラフとして特徴が見られた。まず 0mg～200mg までは似た、グラフの曲線形状となっていて、200mg～700mg までは毎秒回転変数 -0.5 の直線に対して対称な曲線形状となり、700mg～4000mg は似た曲線形状となっている。しかし、0mg～1000mg と 1000mg～4000mg ではデータの幅が異なっているため、明確に結論付けることは出来ないが、今回の計測によって、データの幅を同じにした場合、下線部に示したようなグラフの形状が“似ている”と“対称”を繰り返すと想定される。

(2) 次に、 $\ell=23$ の 500mg～1000g と $\ell=32$ の 0mg～500mg のグラフ形状が似ていることに気づいたため太線にし、上のグラフに示した。この部位について考察し、式にして表すことが出来ないかと考えたところ、二重振り子として統一した性質があることに気づいたので以下にまとめる。

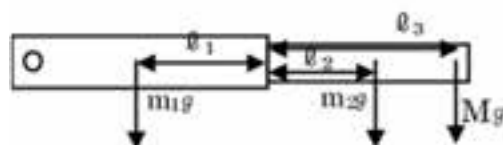
まずこの後の説明をするために二重振り子の図によって各記号が何を示すか図示する。

ℓ_1 …上の腕の下端から重心までの長さ

ℓ_2 …下の腕の上端から重心までの長さ

ℓ_3 …下の腕の長さ

M …おもりの質量



m_1 …上の振り子の質量
 m_2 …下の振り子の質量
 n …毎秒回転変数

二重振り子の原型となる単振り子は、力のモーメント (N) で説明することが可能となる。力のモーメントであれば我々の知識でも説明することが出来るため、考察に利用できないかと考えた。また、一定の形を保ったグラフ形状と一緒にして考えようと思った。

上腕と下腕の両方が水平になった時の、上の腕と下の腕の連結部分のまわりの力のモーメント (N) を示す以下の式を立てた。

$$N = \{ \ell_2 m_2 + \ell_3 M - \ell_1 m_1 \} g \quad \cdots \textcircled{1}$$

これによって算出された、N の値をグラフ形状が似ていて、対応する条件ごとに比べると N の値が毎秒回転変数と反比例の関係にあることが分かった。よって以下の式を立てる。

$$nN = n \{ \ell_2 m_2 + \ell_3 M - \ell_1 m_1 \} g \quad \cdots \textcircled{2}$$

反比例しているということは①によって算出された値に毎秒回転変数の値をかけた積②はグラフの形状で似ている部分で対応する値を代入するとほぼ等しい値になることが分かった。

23cm		32cm	
M(mg)	nN	nN	M(mg)
500	56.15g	82.91g	0
600	88.00g	84.12g	100
700	80.15g	73.46g	200
800	69.20g	57.10g	300
900	71.42g	73.46g	400
1000	57.78g	61.57g	500

ここで 23cm/500mg と 32cm/0mg では②の式で算出された値に大きな誤差があるが、その他の 5 つについては、ほぼ等しいということが出来る。よってここで一般にカオス理論で説明される一見規則性のないように見える二重振り子にも共通の性質があるのではないだろうかと考えられる。

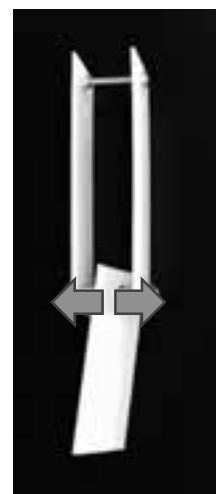
以上の考察を正確に結論付けるために、以下の実験を行ったのでまとめる。

9 本研究における課題

今回の研究では振り子自体の設計上の不具合により、下の腕の横ブレや摩擦による振り子の運動への影響が大きいと判断された。その証拠に、振り子に装着するおもりの質量が大きくなればなるほど、横ブレが大きくなりデータに安定性が保たれなくなってしまった。それは相関係数の値によって確認することが出来る。

また今回は初動実験を含めて 4000 回の計測を行ったが、第七項にあるグラフを見た通り、データの幅が異なっているため考察を事実として確定することが出来ない。よって今後の方針として振り子の改良およびデータ数の確保が急務となる。

(左図：下の腕の横ブレを示している)



10 実験装置の改良

(1) はじめに

今までの研究から摩擦の影響を小さくしたり、横ブレを減らしたりした二重振り子の新たな作成が急務となった。その改良された二重振り子で前回の考察および仮説の検証を行っていきたいと思う。

また新たな研究の視点の確保によって次の研究テーマを探したい。

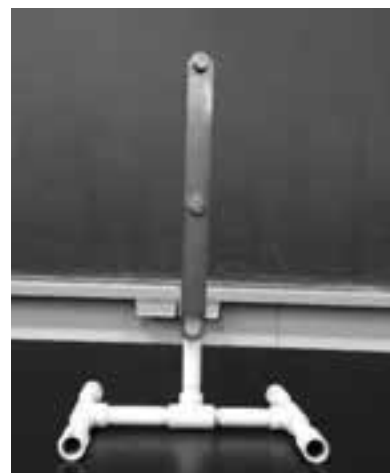
(2) 改良版二重振り子の作成

今回は鉄板・ベアリングを使用して二重振り子を制作した。(上の腕と下の腕の長さの比は 17:15) $\ell = 34$

今回は摩擦を出来る限り減らすために、ベアリングを使用して駆動を滑らかにした。振り子自体の質量を大きくしたため、回転力も大きくなって、より回るようになっている。 <完成品/写真>

(3) 初動測定

改良型は摩擦が大幅に小さくなったため、運動継



続時間が長くなってしまったため、時間的な問題から 40 回の計測でおおまかな運動の様子を把握をする。

実験の方法は改良前と同じであるため、実験方法の項は省略する。

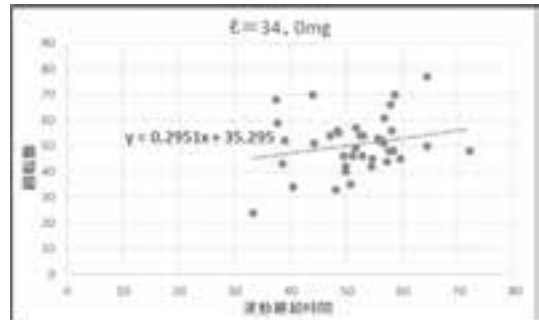
(4) 結果

$l=34, 0\text{mg}$ における運動継続時間と回転数の関係を示す相関図は以下のようになった。

$$r=0.233534$$

(5) 考察

右の相関図を見ればわかるが、横ブレや、摩擦力などの影響が小さい中で測定にもかかわらず $r \approx 0.23$ とデータに安定性がまったく保たれていない。改良前の研究においてカオスで説明される二重振り子も規則的な性質があると説明したが、非常によい状態での計測であるにもかかわらずデータの安定性が保たれていない。よって長さや、おもりの質量を変えたとしても、信用性のあるデータ集計が出来ないと判断した。よって改良前の研究で示した仮説を検証することは不可能だと判断した。データが安定していなければ改良前でのあらゆる考察を検証したとしてもデータの信頼性が低いからだ。



ここで、なぜ改良前のデータでは安定性が保たれていたのかという疑問が残る。よって我々が眼をつけた毎秒回転変数という研究視点において、どのような原因ですべての計測がうまくいったかについて、事項で考察する。

(6) なぜ改良前はうまくいったか

改良前の二重振り子は非常に軽量であったことにまず目を付けた。また摩擦力や横ブレなどの影響が非常に大きかった。改良前の相関図を見ればわかるが、回転数が多ければ多いほど運動継続時間が短くなっていることが分かる。

ここで摩擦力や横ブレが行った仕事は回転数が多ければ多いほど回転数に比例して大きくなる。この仕事の大きさは、軽量の二重振り子の運動性能を圧倒的に凌駕する影響力を持っていたと考えられる。回転数と摩擦と横ブレによる仕事の大きさが比例しているため、回転数と運動継続時間は比例して、強い相関関係を示したのだ。改良された二重振り子では摩擦や横ブレによる仕事小さくなったうえに、振り子自体の質量が前作にくらべ圧倒的に大きくなり、その仕事の振り子への影響力が小さくなった。

以上の理由より、改良版による仮説の検証がうまくいかないと結論付ける。

(7) 新たな視点

下の腕をより多く回すためにはおもりをどの程度、どの位置につければいいかを探る。改良前の研究で分かったことのうちに、おもりの質量によって運動の様子が変化する、ということがあげられる。よって、おもりの位置を下端や、連結部分などどこに付ければより回るのか、どの程度の質量が適度なのか、また何個のおもりが適切なのか判断していきたい。

10 参考文献

使用した文献は以下の通り。

- ・カオスと複雑系の科学
(日本実業出版社・井上政義)
- ・Wikipedia

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E9%87%8D%E6%8C%AF%E3%82%8A%E5%AD%>