

2. 屈折率勾配を持つ溶液の結像作用の研究

静岡県立清水東高等学校自然科学部物理班
2 年 中村麗人 他 12 名

1 研究の目的

(1) 屈折率勾配を持つ溶液について

真水を入れた水槽の底にショ糖の飽和溶液を静かに注入して放置すれば、溶質であるショ糖は水面に向かって拡散し、やがて濃度に応じて屈折率が水面に向かって連続的に変化した溶液が形成される。このような溶液を「屈折率勾配を持つ溶液」と呼ぶ（水深の変化に対する屈折率の変化を屈折率勾配と定義する）。この溶液を通して水槽の背後の物体を覗くと、蜃気楼に相当する 3 個の像（写真 1）が観測される。物理班ではこの三つの像を上のものから順に像 A、像 B、像 C と名付け、解析を継続してきた。像 B は水槽の観測者側に、像 A と像 C は物体側に出現する。また、像 B



写真 1 三つの像

だけは倒立像である。
昨年度は溶液内部を屈折率勾配の大きさにより三つの水深に分類し、それぞれが強さの異なる凸レンズとして作用することで像を出現させていると考え、像 A と像 C は溶液の凸レンズ作用が作る虚像、像 B は溶液の凸レンズ作用が作る実像であると仮説を立て、像の出現位置を予想した。しかし、最も上側の像 A だけは、予想と異なり水槽と物体の間に出現し（図 1）、仮説では説明できないことが分かった。

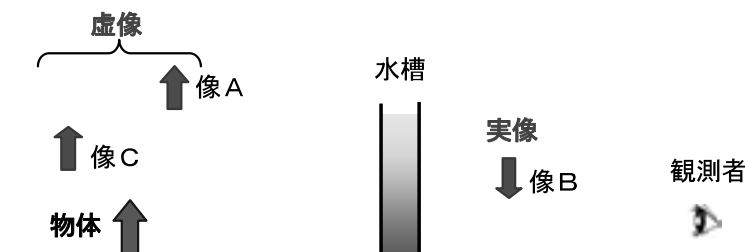


図 1 像の出現位置

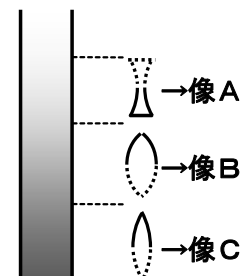


図 2 像と各水深部の対応

(2) 本年度の研究の目的

像 A の出現位置や、像 A が上下方向に少し縮んで出現することを考えると、このとき溶液は凸レンズではなく凹レンズとして作用しているのではないだろうか。凹レンズにより出現する像は正立虚像であり、出現位置は凸レンズとは異なり常にレンズと物体の間である。そこで私たちは本年度以下のような新しい仮説を立て、研究に取り組んだ。

仮説：溶液の三つの領域がそれぞれレンズとして作用し、三つの像を出現させている（図 2）。

像 B は屈折率勾配の大きな水深部の強い凸レンズの作用で結像した倒立実像であり、像 C は屈折率勾配の小さな深い水深部の弱い凸レンズの作用で結像した正立虚像である（昨年度と同様）。一方、像 A は、像 B に対応する水深部の上方の領域が凹レンズとして作用することで結像した正立虚像である。

以上の仮説を確かめるため、本年度は次の点について研究を行った。

- ア 溶液中の屈折率分布や出現する像の位置を正確に求め、昨年度との比較を行う。
- イ 溶液の各水深部に平行な複数の光線を入射し、溶液通過後の進路を調べる。

ウ 溶液の屈折率分布の測定値から屈折率分布の実験式を導出し、溶液中の光線経路を理論的に計算で求め、実験で得られた結果を検証する。

2 屈折率分布の測定

(1) 測定方法

溶液の入っている水槽の角をプリズムに見立て、各水深にレーザー光を入射して偏角を測定することで各水深の屈折率を計算により求めた（図3）。

測定は、溶液作成後24時間ごとに、0時間後から最大96時間後までを1セットとして行う。

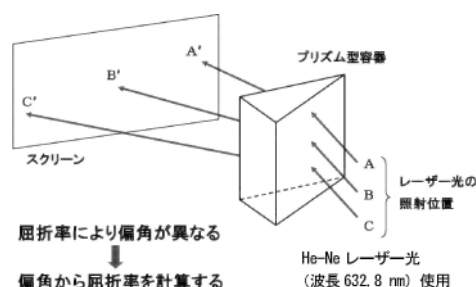
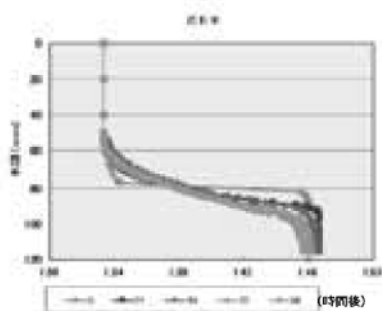


図3 屈折率分布の測定方法

(2) 測定結果と考察

グラフ1は測定結果の一例である。グラフの縦軸は水深、横軸は屈折率を表す。屈折率勾配が非常に大きくなる水深が存在することが読み取れる。

水深が大きくなるほど屈折率勾配も大きくなる領域（図4領域①）では溶液の下側を通過する光線ほど大きく屈曲し、溶液は光線を発散させると考えられる。一方、その下側の領域②では、領域①とは対照的に溶液は光線を収斂させると考えられる（図5）。



グラフ1 測定結果

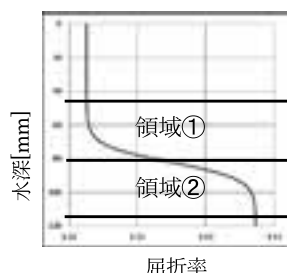


図4 二つの領域

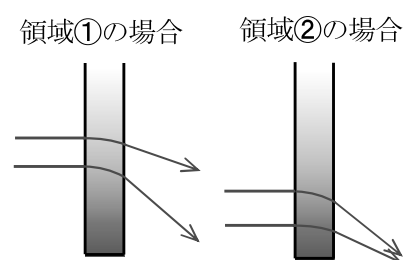


図5 領域①②を通過する光線

3 像の出現位置の測定

(1) 測定方法

カメラの合焦位置を利用して測定した（図6）。これは、調べたい像にカメラでピントを合わせた後、比較用の板にピン트가合う位置を調べることで、像の位置を求める方法である。

自作した「三段水槽」（5mm、10mm、15mmの厚さを持つ水槽）を昨年度と同様に用い、3種類の厚さについて、それぞれ24時間後から96時間後までの測定を1セットとして、これを7セット行った。

今年度も像Aは水槽と物体の間、像Bは水槽の観測者側、像Cは物体の後方に出現した。そこで、以下像Aのみを詳しく取り上げるが、像B・像Cについては昨年度と同様の結果が得られ、仮説が正しいことが確かめられた。

(2) 水槽の厚さによる像の位置の変化

測定結果を平均し、グラフ2に示した。グラフの縦軸は水槽からの距離、横軸は経過時間を表す。水槽の観測者側の面を原点とし、物体側を正の向きとして示す。予想通り、水槽の厚さが5、10、15mmと厚くなるにつれて、像Aの位置は水槽に近づいた。

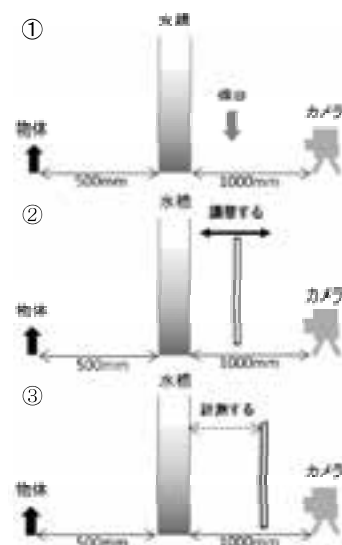


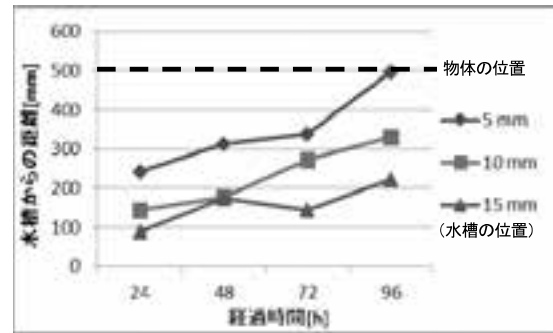
図6 像位置の測定方法

凹レンズでは、レンズ作用が強いほど虚像がレンズに近く出現する。厚い水槽が強い凹レンズに対応すると考えれば、今回の測定結果を矛盾なく説明することができる。

(3) 時間経過による像の位置の変化

像Aを出現させる水深部を調べた後、この水深部の屈折率勾配を調べるため、測定結果から得られた屈折率分布の実験式を求めた。関数型は式1を仮定し、定数A～Eは、実験式が屈折率分布のグラフに近い形を示すように決定した。式1を水深yで微分して屈折率勾配を求め、時間経過にともなう像位置との関係を調べた。

その結果、像Aに対応する水深部の屈折率勾配は時間経過に伴って減少しており、溶液のレンズ作用は次第に弱くなることがわかった。また、グラフ2より、像Aは経過時間が長いほど水槽から遠ざかる傾向が読み取れる。溶液の凹レンズの作用が次第に弱くなっていくためだと考えられる。



グラフ2 像Aの位置の測定結果

$$n(y) = \frac{D}{A + B \times e^{C(E-y)}} + 1.33$$

式1 水深yに対する屈折率n(y)

4 平行光線の入射による解析

(1) 実験方法

溶液のある水深に水平なレーザー光を入射する。線香の煙を充満させた側面の透明な箱の中に水槽を設置することで、レーザー光の経路を可視化し、カメラで撮影する。

この操作を、カメラを固定したままレーザー光の高さを変化させて行い、その都度写真を撮影した。撮影した画像を重ね合わせ、平行光線の収斂や発散を確認した。

(2) 測定結果と考察

上記の方法によって写真2が得られた（写真2は72時間後、水槽の厚さが20mmの場合である）。写真の左端に水槽があり、レーザー光は左から右へ照射されている。溶液の深い水深部では、通過した光線が明らかに収斂していることがわかる。溶液が鉛直方向に光を収斂させる働きを持ち、その働きが像Bを出現させるという、平成24年度の研究と同様の結果が得られた。光線が収斂している位置の上方では、光線が発散していることが確認できる。このとき、光線は凹レンズとして作用しているといえる。この作用が、像Aを出現させていると考えられる。

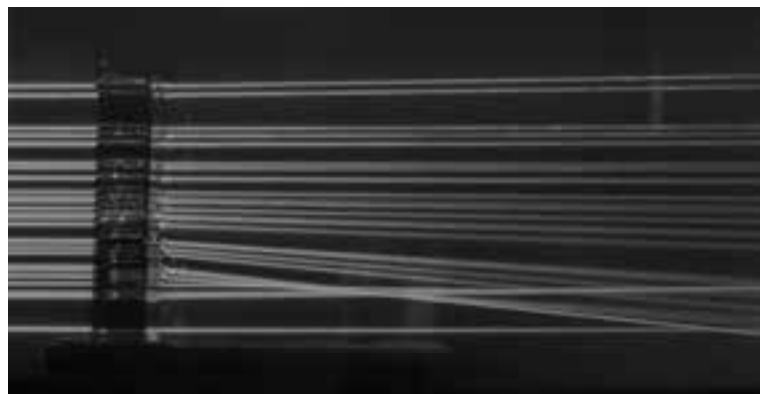


写真2 複数の平行光線の溶液通過後の経路

5 光線追跡による理論的解析

溶液内部の屈折率分布を元に、屈曲して進む光線の経路を数理的に求める作業を光線追跡と呼ぶ。これにより、前述の実験で得られた結果を理論的に検証した。

(1) 光線追跡の理論

屈折率の異なる水深を光線が通過するとき（図7）、屈折率 n_1, n_2 と光線の角度 ϕ_1, ϕ_2 の間

に、 α を定数として①式（式2）が任意の水深で成立する。そのため、ある水深の屈折率、光線の傾きの角をそれぞれ $n(y)$ 、 $\phi(y)$ とおくと常に②式が成り立つ。光線経路を微小な区間に対して直線とみなせば、光線の x 座標が Δx だけ変化したときの y 座標の変化量を Δy とすると③式が成立する。①～③式より、隣接する2点を光線が通過するときの座標は④式と⑤式で関係づけられる（①～⑤式は式2中の数式）。以上の理論を適用し、表計算ソフトを用いて新たに作成したプログラムで光線経路を求め、その結果を図示できるよう試みた。

（２） 平行光線への適用

ア 解析方法

複数の平行光線を溶液の各水深に水平方向から入射した場合の光線経路を数理的に求めた。次に、光線の収斂や発散から各水深部のレンズ作用を調べ、この結果と、水深と屈折率勾配の関係を比較した。

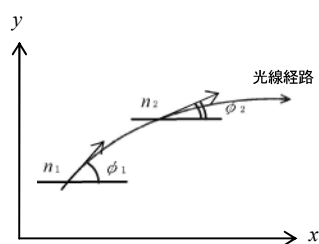


図7 屈折率と光線の角度

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \equiv \alpha \quad \cdots \text{①}$$

$$n(y) \cos \phi(y) = \alpha \quad \cdots \text{②}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi(y) \quad \cdots \text{③}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad \cdots \text{④}$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \sqrt{\left(\frac{n(y_i)}{\alpha}\right)^2 - 1} \times \Delta x \quad \cdots \text{⑤}$$

式2 光線追跡の理論

イ 結果と考察

図8は、72時間後、20 mmの厚さの水槽に、光線を水平方向から溶液に入射した場合の光線追跡による再現結果である。実験結果（写真2）とよく一致しており、光線が収斂する箇所（像Bに対応）と発散する箇所（像Aに対応）が見られた。

光線の収斂、発散を調べた結果、今回の検証では水深 84 mm（高さ 36 mm）を境界とし、溶液がその上側では凹レンズ、下側では凸レンズとして作用していた。一方、グラフ3は水深（横軸）と屈折率勾配（縦軸）の関係である。屈折率勾配は水深 84 mm で最大であった。つまり、図4における領域①（水深が大きいほど屈折率勾配が大きい）では溶液は凹レンズとして作用し、領域②では溶液が凸レンズとして作用していると言える。

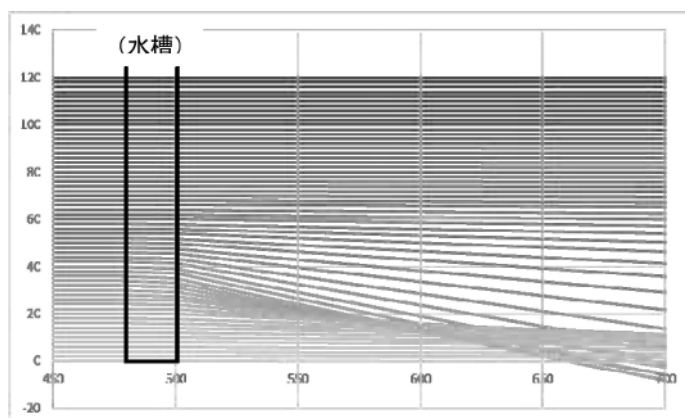
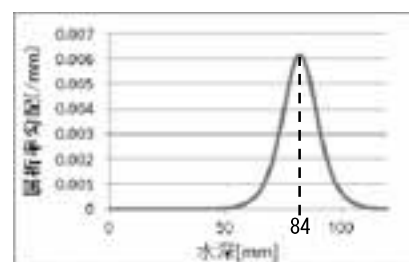


図8 溶液通過後の光線経路（左側から光線を入射）



グラフ3 水深と屈折率勾配

（３） 像の出現位置の数理的再現

ア 解析方法

物体とみなした1点から発する様々な角度の光線が溶液に入射したと仮定し、溶液通過後

の光線が仮想した観測者の目に入るかどうかを調べる（図9）。目に入ったと判断できる光線についてのみ、その直前の光線経路を物体側に延長する操作を行った。延長した直線に交点があれば、観測者はその交点の位置に像を認識する。以下、この点を「像位置」と呼ぶ。

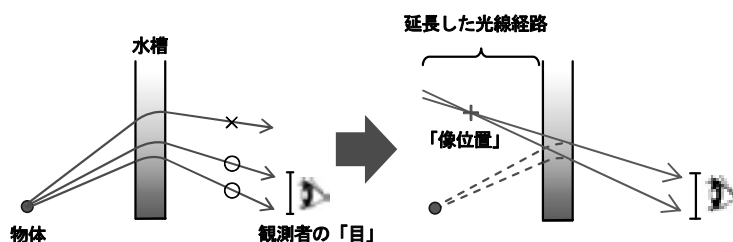


図9 像の出現位置の再現方法

イ 結果と考察

解析結果を図10に示した。横軸は水平方向の位置、縦軸は高さを示す（単位[mm]）。逆方向に延長した経路のみを図示し、交点の座標を平均したものを像位置として「+」のしるしで表した。図10の三つの像位置は、水平・鉛直方向の位置関係に注目すると、上のものから順に像A、像B、像Cに対応すると考えられる。各像の出現位置は実験結果とよく一致している。

また、像Aに対応する「像位置」の水槽の厚さによる違いを調べたところ、実際の測定結果と同様、水槽が厚いほど像Aに対応する「像位置」は水槽に近いことも確認できた。

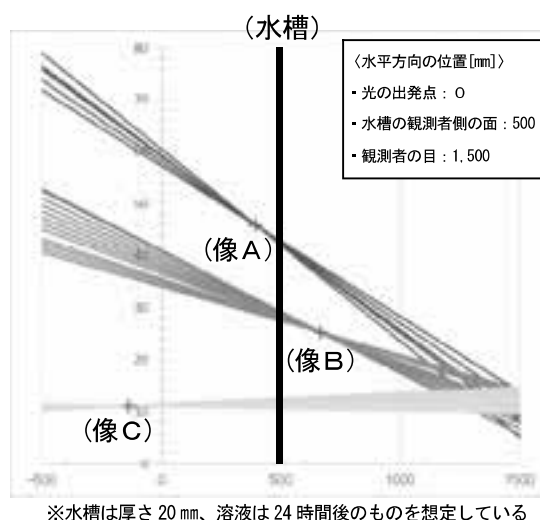


図10 像の出現位置の再現

7 結論

- （1） 昨年度同様、像Bは水槽より観測者側に、像Aは水槽と物体の間に、像Cは物体より遠くに出現した。像Aの出現位置は凹レンズにより出現する虚像の位置と一致し、また、水槽の厚さや時間経過による位置の変化は凹レンズによる虚像と対応している。
- （2） 溶液に入射した複数の平行光線は深い水深部で収斂する一方、その上方の水深部では発散した。この領域は水深が大きくなるほど屈折率勾配が大きくなっており、凹レンズとしての作用を持つことを確認することができた。
- （3） 光線追跡による数値解析の結果は、実験結果と同様の傾向を示し、これまでの複数の実験によって得られた結果を理論的に実証することができた。
- （4） 考察（1）～（4）より、溶液のやや浅い水深部を凹レンズとみなすことで、像Aの出現位置や振る舞いを説明できる。また、像B、像Cについては溶液を凸レンズとみなす昨年度と同様の解釈を確認することができた。以上のことから、本年度の仮説は正しいことがわかった。

8 参考文献（いずれの文献も清水東高自然科学部による）

- （1） 屈折率勾配を持つ溶液が示す凸レンズの作用 平成25年度理科研究論文集
- （2） 屈折率勾配を持つ溶液が示すレンズ効果の研究 平成24年度理科研究論文集
- （3） 光線追跡による蜃気楼モデルの解析 平成21年度理科研究論文集