

4 平行な 2 本の電子線の間にはたらく力

1 動機と目的

導線 2 本を平行に置き、同じ向きに電流を流すと、たがいに引き合う。これは、片方の電流が周りに同心円状に磁場を作り、他方の電流が、フレミングの左手の法則により、その磁場から力を受けるからである。

ところで、直流回路の一部を真空にし高電圧をかけると、真空中の陰極から負(−)の電気を帯びた多くの電子が連続して出て、陽極に移動していく。これは真空中を流れる電流で、「陰極線」と呼ばれている。

そこで私たちは、同じ陰極線 2 本を平行に置いたらどうなるか、疑問に感じ、検討することにした。なお、陰極線を「多くの電子が連なって等速 v で移動する電子線」として検討することにした。また、すべて真空中で行われるものとした。

そして 2 つの疑問を持った。

① 第 1 の疑問は「電子線にはたらく合力は引力になるのか反発力になるのか」であった。

電子線は電流だから電流としての性質がある。つまり、速度が等しい平行な 2 本の電子線どうしは磁場をつくり、互いに引力があるはずである。

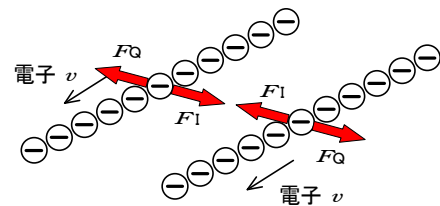
ところで、導線を通る電流は電場をつくらない。つまり電流どうしには、電場に関する力はない。ところが電子線は、負(−)の電気を帯びた電子が並んだものである。つまり、2 本の電子線は電場をつくり、たがいに反発力をはたらくはずである。

ということは、電子線には、電流としての引力と、電荷としての反発力が同時にたらくことになる。「ではどちらが大きいのか」つまり「合力は引力になるのか反発力になるのか」疑問に思ったのである。

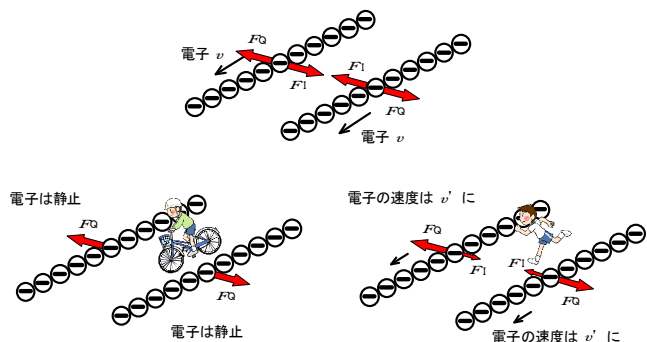
② 第 2 の疑問は「見る人の運動状態によって、電子線にはたらく合力の大きさが異なる。これはどういうことか。」であった。

電子と同じ速度で運動している人を考えると、この人が見る電子は静止している。ということは、この人には電流は観測されないで、電流としての引力はない。また、電子の運動方向に電子とは異なる速度で運動している人を考えると、この人が見る電子の速度 v' は、私たちの見る電子の速度 v とは異なる。つまり、電流の大きさが異なり、その結果、引力の大きさが異なる。

以上のように、電流としての引力は見る人の運動状態によって存在したりしなかったり、あるいは大きかったり小さかったりする。つまり



第 1 の疑問：合力は引力か反発力か？



第 2 の疑問：合力が異なるが？

「見る人の運動状態によって、電子線にはたらく引力と反発力の合力の大きさは異なる」のである。
 以上の2つの疑問を解決すること、これが研究の目的である。

2 第1の疑問についての考察

2本の電子線を

電荷の線密度（静止時）： ρ_{10} [C/m]、 ρ_{20} [C/m]

電子の速さ： v [m/s]

とし、定量化する。

電子線は電荷を持った電子の移動だから電流であり、2本の電流の大きさを、それぞれ I_1 [A]、 I_2 [A]とすると、「電流の大きさは単位時間に通過する電気量」なので、それぞれ

$$I_1 = \rho_{10} v \quad I_2 = \rho_{20} v$$

となる。（なお、電流の向きは電子の運動方向と逆、と決められている。）

平行で同じ向きに流れる2本の電子線の、電流としての引力 F_I [N]を求める。

そのために、教科書にある「平行な2本の導線を通る電流の間にはたらく力」の公式を利用する。公式は

「真空中に、平行に r [m] 離して置いた2本の導線それぞれに、同じ向きに電流 I_1 [A]、 I_2 [A]を流すと、それぞれの電流の間に引力がはたらき、その大きさはどちらも等しく、長さ l [m]あたり $F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l$ である。（ μ_0 は「真空の透磁率」）」

であり、この公式に、 $I_1 = \rho_{10} v$ 、 $I_2 = \rho_{20} v$ を代入すると、電流としての引力 F_I [N]は

$$F_I = \mu_0 \frac{\rho_{10} \rho_{20} v^2}{2\pi r} l$$

となる。

次に、電子線の、同じ負(-)の電荷どうしによる反発力の大きさ F_Q [N]を求める。

そのために、教科書に書いてあるように、次の3点を順に行い求める。

① 電気量 $\pm Q$ [C]から出入りする電気力線の本数 N [本] を次のように決める（真空中）。

$$N = 4\pi k_0 Q \quad (k_0 \text{ [N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2] \text{は、クーロンの法則 } F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ の比例定数})$$

② ①のように決めると、ある場所での電気力線の密度 D [本/m²]と、電場の強さ E [N/C]の間に $E = D$ の関係が成り立つ。

③ 電気量 q [C]の電荷が強さ E [N/C]の電場から受ける力の大きさを F [N]とすると $F = qE$ である。

①②③にしたがって計算すると

$$F_Q = 2k_0 \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{r} l$$

となる。

以上から、それぞれの電子線が受ける合力 F [N]は、反発力の向きを正として

$$F = F_Q - F_I = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2\pi r} (4\pi k_0 - \mu_0 v^2) l$$

となる。ここでさらに、教科書に書いてある次の2つの公式

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \quad (\epsilon_0 \text{ [F/m]は真空の誘電率}), \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (c \text{ [m/s] は光速})$$

を代入すると、合力 F [N]は

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l$$

となる。

すなわち、合力 F [N] は光の速さ c [m/s] に関係し

(1) $v < c$ (光速より小) のとき

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0 \text{ だから、} F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l > 0 \text{ つまり反発力}$$

(2) $v = c$ (光速) のとき

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0 \text{ だから、} F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l = 0$$

(3) $v > c$ (光速より大) のとき

$$1 - \frac{v^2}{c^2} < 0 \text{ だから、} F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l < 0 \text{ つまり引力}$$

である。

ところが、アインシュタインの相対性理論によると「物体の速さは光速以上になることはない」ので、(1) の場合しかありえない。

つまり、第1の疑問「電子線にどのような力がはたらくか」に対して、

「平行な2本の同じ電子線の間にはたらく力は互いに反発力であり、その大きさは、長さ l [m] あたり

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l$$

である。」

という結論を得る。

3 第2の疑問についての考察

ところがこの結論は、第2の疑問「見る人の運動状態によって、電子線にはたらく合力の大きさが異なる。どういうことか。」を解決していない。

電子と同じ速度で運動していて電子の相対速度が 0 [m/s] の人、あるいは電子の運動方向に電子と異なる速度で運動していて電子の相対速度が v [m/s] の人が見る合力 F [N] は、それぞれ

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2 \pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l$$

において、 v [m/s] を 0 [m/s] あるいは v [m/s] としたものなのであり、合力の大きさは異なる。

この第2の疑問を解決したのは、アインシュタインの相対性理論であった。相対性理論によると

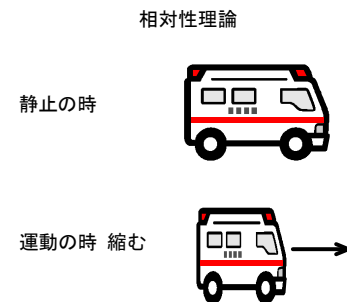
「静止しているときに平行に並んでいる同じ長さの2本の棒が、棒の向きに異なる速度で運動すると、互いに相手が短く見える。

すなわち、静止しているときの棒の長さを l_0 [m] とし、互いに運動しているときの片方の棒から見た別の棒の速さを v [m/s]、棒の長さ l [m] とすると

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

である。」

というのである。



これを用い、電子線の速さが v [m/s]のときの、2本の電子線の電荷の線密度 ρ_1 [C/m]、 ρ_2 [C/m] を求める。静止しているときの長さが l [m]の線が線の向きに速さ v [m/s]で運動すると、線の長さが

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [\text{m}]$$

と短くなり、この中に電荷 ρ_{10} [C/m]、 ρ_{20} [C/m] が存在するので、

$$\rho_1 = \frac{\rho_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \rho_2 = \frac{\rho_{20}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

となる。

したがって今まで考えてきた力はすべて、 ρ_{10} [C/m]を ρ_1 [C/m]に、 ρ_{20} [C/m]を ρ_2 [C/m]に置き換えたものになる。合力 F [N]の場合

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2\pi r \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l$$

において、 ρ_{10} を ρ_1 、 ρ_{20} を ρ_2 に置き換えると

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2\pi r \epsilon_0} l \quad (\text{一定})$$

となる。すなわち

「平行な2本の同じ電子線の間にはたらく力は、見る人の運動状態によって異なることはなく、どのような運動状態の人が見てもすべて等しい。そしてその力は、電子が静止していると観測する人が見る力と等しい。すなわち、反発力であり、その大きさは、長さ l [m]あたり

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2\pi r \epsilon_0} l \quad (\text{一定})$$

である。」

なお、この式中の l [m]は、観測者が見た長さ、つまり、2本の電子線の電荷の線密度がそれぞれ ρ_1 [C/m]、 ρ_2 [C/m]のときの長さである。

4 確認実験とその考察

以上の結論が正しいか、クルックス管で調べた。クルックス管は、多数の平行な電子線の集まりである陰極線を発生させる装置である。

陰極線のうち2本の電子線を考えると、反発力がはたらく。次にこの2本の電子線を1本と見なし、次の1本とで2本の電子線とみなすと同じ結論になる。そしてこれを繰り返せば、電子線の本数が多い場合、つまり陰極線の場合も進行方向と垂直に反発力が生じることになる。ただし、このクルックス管による陰極線の電子は、少なくとも最初は加速度運動をされると考えられるが、その場合も成立するものと仮定した。

観察の結果、約 1.5 [mm]の狭い隙間を通った陰極線は、進むにつれて徐々に広がり、隙間から 100 [mm]離れた場所で、幅が約 4.0 [mm]であった。(写真1)

ただこの原因が、クルックス管の構造にある可能性がある。そこで、もっと確実に確認する方法として、クルックス管にかける電圧を、大きくする場合と小さくする場合を比べることにした。

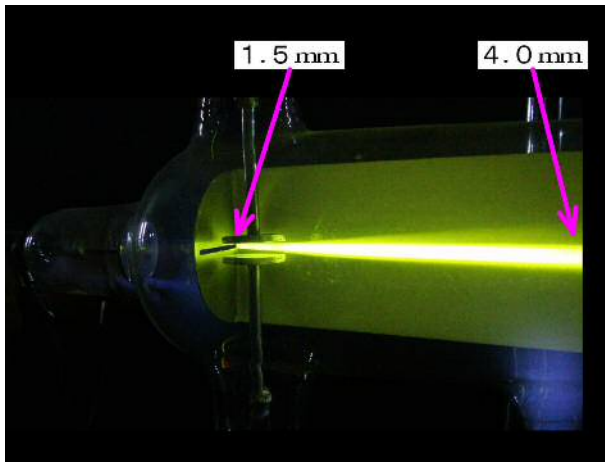
クルックス管の隙間から飛び出す電子の速さは、クルックス管にかける電圧により異なり、高電圧であれば速く、低電圧であれば遅い。つまり、電圧が大きければ電子の速さが大きく、クルックス管内を進むのにかかる時間は短い。逆に電圧が小さければ電子の速さが小さく、クルックス管内を進むのにかかる時間は長い。この間、陰極線を構成している多くの電子線の間には、どちらの場

合も進行方向と垂直に、互いに等しい反発力がはたらく。

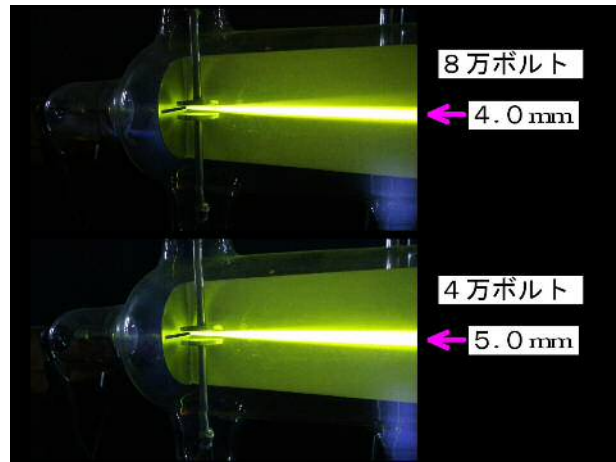
すると高電圧の場合、電子の移動時間が短いので、電子線の間には反発力がはたらく時間が短く、進行方向と垂直な方向への電子の変位は少ないはずである。つまり、陰極線の幅の広がりはいずれである。逆に低電圧の場合、電子の移動時間が長いので、電子線の間には反発力がはたらく時間が長く、進行方向と垂直な方向への電子の変位は大きいはずである。つまり、陰極線の幅の広がりはいずれである。

8万ボルトほどの高電圧の広がり方と、4万ボルトほどの低電圧の広がり方とを比べたところ、隙間から100[mm]離れた場所で、8万ボルトのときに約4.0[mm]、4万ボルトの時に約5.0[mm]であった。(写真2)

これらの確認実験は、定性的ではあるが、私たちの結論が正しいことを示していると思われる。



(写真1) 陰極線の広がり



(写真2) 8万ボルト・4万ボルト

5 最終結論

最初、第1と第2の2つの疑問があったが、2つまとめた最終結論は以下のとおりである。

「電子の速度が等しい平行な2本の電子線の間にはたらく力は反発力で、その大きさは電子の速度によらず一定で、電子が静止しているときの反発力の大きさと等しい。

そして、運動状態が異なるすべての人が見る力もこれと等しい。

その値は、静止時の電子線の電荷の線密度をそれぞれ ρ_{10} [C/m]、 ρ_{20} [C/m]、平行線間の距離を r [m]、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m]とすると、長さ l [m]あたり

$$F = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{2\pi r \epsilon_0} l \text{ (一定)}$$

である。」

なお、この結論を導くのに参考にしたのは下記の書籍のみであり、他に参考にしたものは一切ない。したがって、この公式は世界で初めて導かれたものである可能性がある。

6 参考文献・他

「改訂版 高校物理 物理Ⅱ」2011年 数研出版 (本校使用の教科書)

「相対論のABC」福島肇 1993年 講談社 (ブルーバックス)