

サイコロの目の出現率について

静岡県立科学技術高等学校

自然科学部 2 年 高井真也 稲森煌羅 大石鈴央

1 動機

サイコロの出る目の確率は $1/6$ ではないということをネットニュース知り、サイコロの目の確率が変わるということは、サイコロの目の確率に影響を与える要因があるのではないかと考え、本研究を行った。

2 先行研究

奈良女子大学附属中等教育学校(2020)ではサイコロを 6000 回振ったところ、5 の目の出現率が最も大きいという結果を示した。サイコロの確率の偏りは、くぼみの数による重心の偏りが影響していると考察した。しかし、本当にサイコロは 5 の目が出やすいのか疑問に思った。福井県立高志高等学校 高志中学校(2016)では完全な同一条件下でサイコロを振る実験を行ったが、傾向が一致しなかった。伊那北高校(2017)では立方体に穴を開け、鉛を詰める実験を行い、重心の偏りが大きくなるほど出現率の偏りが大きくなるという結果を示した。どの程度の重心の偏りが出現率に影響するのかを調べる必要があると考えた。

3 予備実験

サイコロは本当に 5 の目が出やすいのか調べるために、サイコロを 6000 回手で振って検証したその結果(図 1)、6 の目の出現率が最も高く、5 の目の出現率はほぼ $1/6$ であった。先行研究と今回の結果をふまえると、通常のサイコロにおいて重心はサイコロの出現率には影響がないのではないかと考えた。

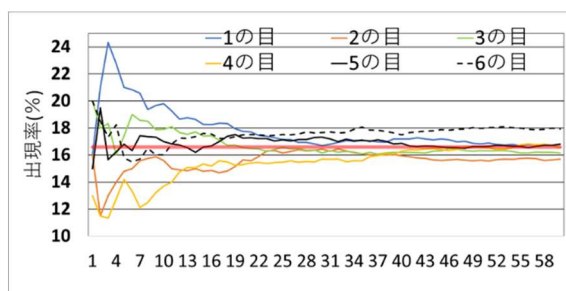


図 1 予備実験のグラフ

4 研究目的

サイコロの先行研究や予備実験から、サイコロの確率は条件を変えることで出目の出現率を変えられる可能性があることがわかった。そこで、サイコロの目の出現率に影響を与える要素を明らかにすることを目的として研究を行う。

研究の方針として以下のような2つのことを確かめることにした。

(1) 通常のサイコロにおいて重心が出現率に影響を与えているのかを明らかにする。そのために、重心をかえるために加工したサイコロとの比較を通して確かめる。

(2) サイコロの落とし方と高さ、落とす床の材質を変えた時に出現率が変化するかを確かめる。

5 サイコロの重心の測定

(1) サイコロについて

市販のサイコロ(15.8mm)と、これを加工して2種類の加工サイコロを作成した。加工サイコロは5の目に半径 3.4mm 深さ 8mm の穴を 5 個、半径 2.4mm 深さ 8mm の穴を 4 個、合計 9 個の穴をドリルであけた(図



図 2 穴あきサイコロ



図 3 穴詰めサイコロ

2)。穴のあいたままのサイコロを穴あきサイコロ、その穴に鉄粉と木工用ボンドを混ぜたものを詰めたサイコロを穴詰めサイコロ(図3)と呼ぶことにする。

(2) 重心の測定

(ア) 重心の測定方法

重りを糸でつるして鉛直線の基準線をつくる。その前方にサイコロの角に糸をつけてつるしたものを重ね、サイコロと重りが静止した時、重りによって鉛直になった糸からサイコロの角がずれているなら、その方向に重心が寄っているという判断で重心の位置を調べた。サイコロは3つの角でつるした。

(イ) 計測結果

図4、図5、図6に3つの角でつるした写真を載せた。また、比べている面を写真上に示した。

無加工サイコロでは各写真において下端の角を見ると(赤丸の枠内)、角と糸のずれはほとんどないように見える。

穴あきサイコロでは、一番左の写真において、下端の角が糸より右側にずれており、写真の右下には穴の開いた5の面が見えることから、穴の削られた面と逆の面に重心が偏っていると考えられる。

穴詰めサイコロでは、中央の写真において、下端が糸より左側にずれており、写真の中央に穴の詰まった5の面が見えることから、穴を詰め重くした方の面に重心が偏っていると考えられる。

(3) 重心の計算

(ア) 重心の計算方法

重心を以下の重心座標をもとめる式①で求める。

また、式①におけるx座標は図7の通りである。

$$X_g = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{式①}$$

x_1, x_2, x_3 : くぼみのx座標
 m_1, m_2, m_3 : くぼみの総質量
 X_g : 全体の重心のx座標

①加工なしサイコロの場合

両端だけに穴があると仮定して3方向の断面で重心を求める。目の穴がすべて埋まった時に重心が中心にくると考え、左のくぼみ、くぼみを持つ本体、右のくぼみと3つの物体の質量と重心座標を考える。表1のように各変数を決めて x_2 を計算で求める。



図4 無加工サイコロの重心測定の写真

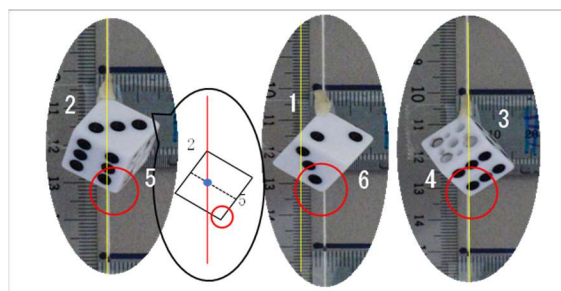


図5 穴あきサイコロの重心測定の写真

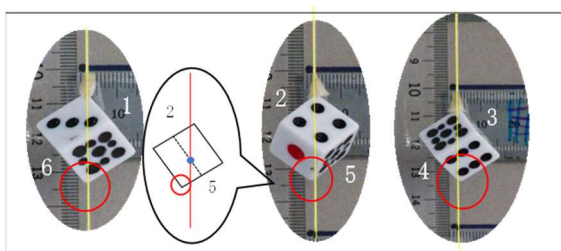


図6 穴詰めサイコロの重心測定の写真

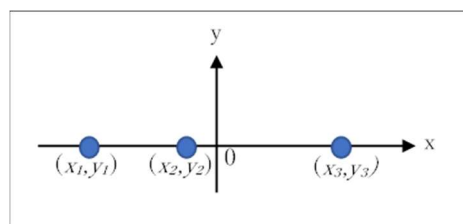


図7 式①におけるx座標

表1 加工なしサイコロの各変数

x_1, x_3 : くぼみのx座標
m_1, m_3 : くぼみの総質量
x_2 : ずれた重心のx座標
m_2 : サイコロ本体の質量
X_g : 全体の重心

②加工サイコロの場合

加工サイコロでは中心を原点(0,0)として、 x 軸を質量の見る領域を置き、サイコロの辺に平行になるように考える。穴を開けた領域aの重心をその中心 x_1 とし、穴のない領域bの重心をその中心 x_2 とした2つのを合わせた重心 Xg を求めた。穴を詰める前後のサイコロの質量を求め、ここから穴を埋めている鉄粉の質量がわかる。表2のように各変数を決めて Xg を計算で求めた。

表2 加工サイコロの各変数

x_1, x_2 : 原点からの距離
m_1, m_2 : 各領域の質量
Xg : 全体の重心

(イ) くぼみの質量の求め方

①くぼみの体積

サイコロのくぼみの直径と穴の深さをノギスで測る。インターネットのサイト [3] 上で公開されている一部が欠けた球の体積を求める式(式②)を使って計算する。サイト上ではもともになる球の半径 r と球を切り出す高さ h の値を入力して計算する。 r は三平方の定理(式③)を使って求めた。ここでは1の面の赤いくぼみと他の面の黒いくぼみの体積を求めた。黒いくぼみのサイズはどの目においてもほぼ同じであった。

$$V = \frac{\pi}{6} h (3c^2 + h^2) \quad \text{式②}$$

$$r = \frac{c^2 + h^2}{2h} \quad \text{式③}$$

V : 体積 h : 高さ

c : 断面の半径 r : 球の半径

②サイコロの密度

一辺 15.8mm の立方体の体積(赤いくぼみ1個と黒いくぼみ20個分)からくぼみの体積を引き、実際の体積を求める。サイコロの質量は電子天秤を用いて求め、密度を計算した。

③くぼみの質量

くぼみの体積とサイコロ本体の密度よりくぼみとして欠損した部分の質量が求められる。

(4) 結果

(ア) 加工なしサイコロ

加工なしサイコロの重心は各向かい合う面同士の比較から、1と6の面では、1.35 μm だけ1の面側に重心がずれていた。2と5の面では、2の面側に14.3 μm 、3と4の面では3の側に4.78 μm ずれていた(図8)。

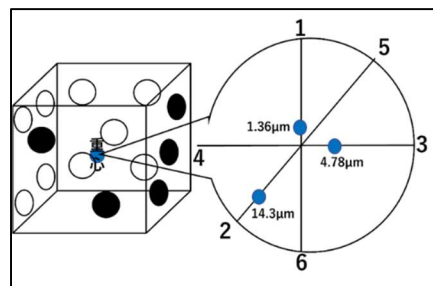


図8 通常サイコロの重心のずれ

(イ) 加工サイコロ

穴あきサイコロの場合、中心から2の目側に0.43mm 偏っていた。穴詰めサイコロの場合、中心から5の目側に0.63mm 偏っていた。

6 サイコロの目出現率の測定

(1) 実験方法

サイコロの向きは1の面を上、5の面を正面にして落とす。試行場所は全て学校の廊下(ウレタンの床)で行う。落とし方は以下の2通りで、サイコロは4個使いそれぞれで各1000回の試行を行う。

a. 指で押し出す(図9 押出法)

b. 力学スタンドを使い、ピンチではさんだ状態から水平に落とす(図10 水平法)。



図9 押出法の写真

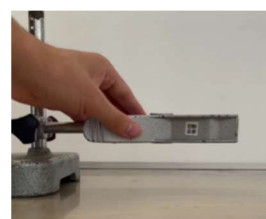


図10 水平法の写真

(2) 結果の評価方法

サイコロの出目に偏りがあるのかどうか、偏りが自然のバラつきの範囲内なのかどうかを確認するために統計的評価として χ^2 検定での仮説検定を行った。 χ^2 検定では統計のバラつきが大きいほど χ^2 の値が大きくなる。 χ^2 値は観測値 O と理論値 E によって、次のように表せる(式④)。 E は試行回数 n と論理的確率 pi の積で決まる(式⑤)。論理的確率は $1/6$ なので $E=1000/6$ となる。ここでは5%有位水準と比較し(χ^2 値 11.07)、結果に偏りがあるかどうかを評価することにする。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(O - E)^2}{E} \quad \text{式④}$$

$$E = n \times pi \quad \text{式⑤}$$

(3) 実験1：加工サイコロの目の出現率

(ア) 目的：重心のずれがどの程度出現率に影響を与えるのか、加工サイコロで調べる。

(イ) 実験方法：90cmの高さから押出法で行い、1000回振って各目の出現率をまとめる。

(ウ) 実験結果：各面の出た回数を縦軸にとり結果を図11にまとめた。穴あきサイコロの結果(図11左)をみると、5の目、4の目の出現率が最も大きくなった。重心が偏っている側の目、穴あきサイコロでは2の目、穴詰めサイコロでは5の目の出現率が低く、反対側の目の出現率が最も大きくなった。 χ^2 値はどちらも5%有意水準を上回り、偏りがあると評価できる。

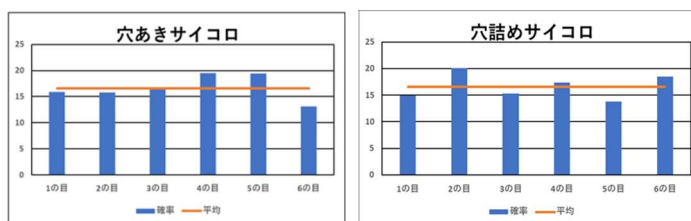


図11 加工サイコロにおける各目の出現率のグラフ

(エ) 考察：数100 μ m程度であっても重心がずれることで、サイコロの出目に偏りが生じることがわかったが、その差はそれほど大きくないことがわかった。

(4) 実験2：押出法での目の出現率

(ア) 目的：無加工のサイコロを使い押出法で高さを変えた時の各目の出現率を調べる。

(イ) 落とす高さ：押出法で90cm、60cm、30cmの高さから落とす。

(ウ) 結果：サイコロの各目の出現率をグラフにし、結果を図12にまとめた。押出法90cm(図12左)をみると、6の目が最も多く出たが、どの目も $1/6$ に近い値をとっていた。押出法60cm(図12真ん中)は5の目が、押出法30cm(図12右)は3の目が最も多く出たが、各目の出現率は $1/6$ に近い値をとっており、出現率に偏りを見ることができなかった。 χ^2 検定の結果でも、押出法90cm、押出法60cm、押出法30cmの各試行において、出現率は5%有位水準を下回った。

(エ) 考察：押出法では高さを変えても出現率に大きな差を生じることにはなかった。無加工のサイコロにおいて重心のずれは、出目の偏りを生じさせるほどのものではないと考えられる。

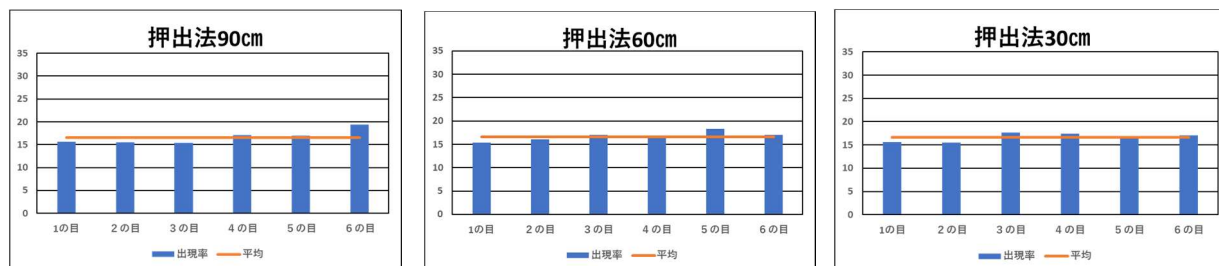


図12 押出法で高さを変えた時の各目の出現率のグラフ

(5) 実験 3：水平法での目の出現率

(ア) 目的：無加工のサイコロを使い水平法で高さを変えた時の各目の出現率を調べる。

(イ) 落とす高さ：水平法で 30 cm、20 cm、10 cm、5 cm の高さから落とす。

(ウ) 結果：サイコロ各目の出現率をグラフにし、図 13 にまとめた。結果、水平法 5 cm (図 13 右下) 以外に出現率に大きな偏りはみられない。水平法 5 cm では特異的な差がみられ 6 の目は 30% を超えている。 χ^2 検定では有位水準 5% を 30cm、20cm の結果は下回っており、10cm ではわずかに、5 cm では大きく上回っていた。

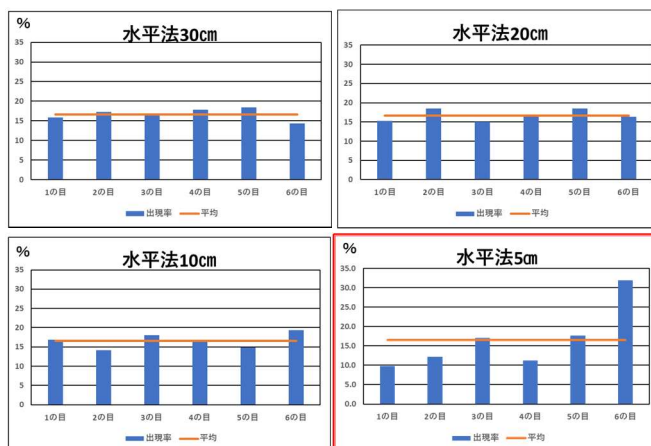


図 13 水平法で高さを変えた時の各目の出現率のグラフ

(エ) 考察：水平法 5 cm では最初に上にした 1 の目と反対の 6 の目の出現率が最も大きくなった。別の目を上にしても反対の目の出現率が大きくなるのではないかと考え、サイコロを 1 の目を正面に、2 の目、3 の目を上にして、水平法で 5 cm の高さから落とす試行を行ってみた。

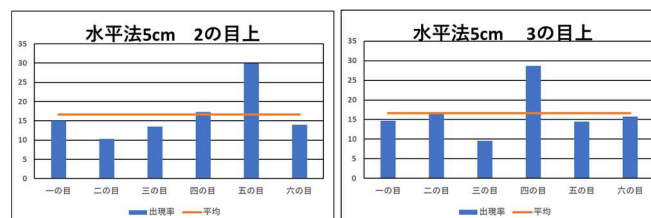


図 14 水平法 5cm で上にする面を変えた時の各面の出現率

結果は図 14 のようになり、最初に上にした目と反対の目の出現率が最も大きくなった。また、 χ^2 検定では有位水準 5% と比べてどちらも大きく上回っていた。このことから、さいころは 5cm の高さから水平にして落とすと、最初の着地の後に 180° 回転して着地していると考えられる。水平にしてまっすぐ落とすと、上にある目がそのまま出ると予想していたので、この結果は意外であった。10cm の高さからの結果については、5% 優位水準をわずかに上回る検定結果であるが、それが偏りがあると考えられるのかどうかの評価はここでは難しい。

(6) 実験 4：着地面を変えたときの各目の出現率

(ア) 目的：水平法 5 cm の時には出現率に偏りができるとわかったが、着地面がどのような面でもそうなるのか疑問に思った。そこで、今まで実験を行ってきたウレタン



図 15 ウレタンの床



図 16 実験室の机



図 17 カーペット

の床 (図 15) 以外の面に落とすと出目はどうなるのか、実験室の机 (図 16)、カーペット (図 17) の 2 つの面で 5cm の高さから水平法でサイコロを 1000 回ずつ落とす試行を行い、それぞれの目の出現率を比較する。

(イ) 結果：結果のグラフを図 20 にまとめると、机上で行った場合 (図 18 左) は、ウレタンの床で行った場合の出現率よりも偏りが少なく、 χ^2 値も有意水準を下回った。また、カーペットで行った場合 (図 18 右) は、ウレタンの床で行った場合の出現率よりも 6 の目に偏りが大きいことがわかった。

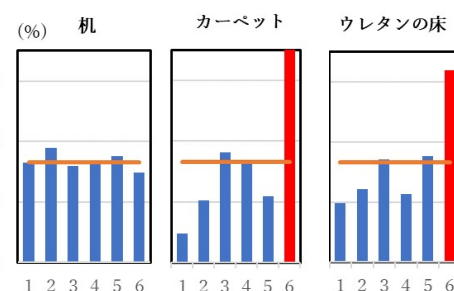


図 18 それぞれの床での出現率のグラフ

(ウ) 考察：実験室の机で行った場合(図 18 左)はサイコロが多くバウンドしていて、カーペットで行った場合(図 18 右)はサイコロがあまりバウンドしていないように見られた。また、実験室の机の上でサイコロを転がすと、サイコロのバウンドごとの最高点の高さが不規則になる運動が起きることがわかった。このことから、サイコロのバウンド数がサイコロの出現率に影響を及ぼしているのではないかと考えた。

7 反発係数の測定

(1) 目的：サイコロの出現率にはサイコロのバウンドが関わっているのではないかと考えられた。そこで、反発係数を求めて出現率との関係を見る。

(2) 方法：反発係数は 60cm の高さから水平法でそれぞれの素材の床にサイコロを 5 回落とした。サイコロが跳ね上がる様子を iphone で撮影し、その高さを映像から測った。そして跳ね返った最高点の高さの平均値を取り、式⑥に代入して値を求める。

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \dots \text{式⑥}$$

e ：反発係数

h_2 ：跳ね返った時の最高点の高さ

h_1 ：サイコロを落とした時の高さ

表 3 それぞれの素材の反発係数

	反発係数
ウレタンの床	0.39
机	0.64
カーペット	0.29

(3) 結果：それぞれの素材の床での跳ね返った最高点の高さと計算した反発係数を表 3 に示す。反発係数は机、ウレタンの床、カーペットの順に小さくなっていた。

(4) 考察：実験 4 の結果をここでの反発係数を踏まえて考えると、机では反発係数が高く、出現率に偏りが無いのに対して、カーペットでは反発係数が低く、出現率に偏りがあるので、出現率の偏りには反発係数が影響していると考えられる。

8 全体考察

(1) 重心の偏りと目の出現率について

加工した 2 つのサイコロと無加工のサイコロの 90 cm での出現率のグラフ(図 19)を比較してみると、無加工のサイコロ(図 19 上)は、重心が 2 の面側に 14.3μm 寄っているが、5 の目の出現率はさほど高くなく、 χ^2 値は優位水準 5 %を下回っているので、出現率が偏っていないことがわかる。加工した 2 つのサイコロ(図 19 中央と下)は重心が寄っている面と反対の目の出現率が高くなっており、 χ^2 値は優位水準 5 %を上回っていた。このことから、無加工のサイコロでは出現率に影響を与えるほど重心は偏っていないということがわかった。

(2) 水平法 5cm での目の偏りについて

6 の実験 3 から、水平法 5 cm の高さから落としたサイコロは上にした面と反対の面に出現率が偏ることが分かったが、それはサイコロが 180° 回転して着地するためと考えた。

iphone で 5 cm の高さから 6 の面を下向きにしてサイコロを落とし、サイコロの回転をスロー映像(0.2 倍速)で撮影して回転の角度を確認した。すると、水平法 5 cm での回転の角度は 180° 回転し、そのまま止まっていることが確認できた。このことから、水平法 5 cm の高さから 6 の面を下向きにして落としたサイコロは、鉛直に落ちて跳ね返った後に 180° 回転しているので 6 の面が上になり、出現率に偏りが生まれるのではないかと考えられる。

しかしながら、同じように跳ね上がっている水平法 10 cm での出現率の χ^2 の値は 11.0 で有意水準 5 % とほぼ一緒になり、偏りがあるともないともとれる結果であった。そこで、水平法 10

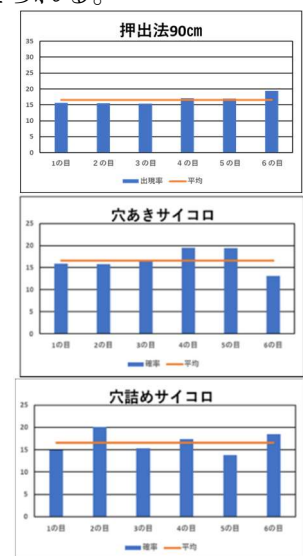


図 19 通常、加工サイコロの出現率のグラフ

cmからの落下、跳ね返りを水平法 5 cmの結果から考察してみる。

ここではサイコロの回転の角度をバウンド時の滞空時間から求める。まず、サイコロのバウンドは投げ上げの運動だと考えて、投げ上げの式から滞空時間を求める。サイコロの着地時の速さは、力学的エネルギー保存の法則から求めることができる。反発係数は測定で求めた値を使う。滞空時間を水平法 5 cmと 10 cmからの落下について求め、水平法 5 cmの高さでの回転の角度 180° を基準として、水平法 10 cmでの回転の角度を求めると 5 cm からの落下については滞空時間 $t_1 = 0.078[s]$ 、回転の角度 $\theta = 180^\circ$ 、10cm からの落下については 1 回目のバウンドの時滞空時間は $t_2 = 0.11[s]$ 、回転の角度 $\theta = 254^\circ$ 、2 回目のバウンドでは $t_3 = 0.04[s]$ 、回転の角度 $\theta = 92^\circ$ であった。

実際にスロー映像を撮影し確認すると、1 回目のバウンドで約 270° すなわち $3/4$ 回転、2 回目のバウンドで約 90° すなわち $1/4$ 回転の回転していることがわかった。計算と実測では値のずれはほとんどなく、回転の速さは 5 cmから落とした時と同じであることがわかった。この結果から、1 回目のサイコロのバウンドでサイコロの出ることのできる目は 4 通りあり、2 回目のサイコロのバウンドでは 4 通りずつあることになる。ここから、出る可能性のある目は 16 通りあることになり、出現率の偏りが少なくなっているのではないかと考えた。また、この 16 通りを樹形図にすると図 20 のようになり、

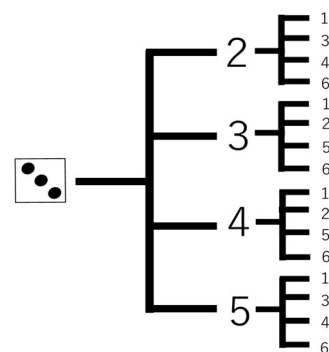


図 20 出る目の樹形図

1、6 の目の出る確率は「0.25」、2、3、4、5 の目の出る確率は「0.125」となり、わずかに 1 と 6 の目が大きい確率となる。ここで改めて水平法 10cm の結果を見てみると、1 の目の出現率と 6 の目の出現率がわずかに他の目より高いことに気づく。このことから、10cm の出現率の χ^2 検定の結果は偏りがあると捉えてもよいのではないかと考えられる。

(3) サイコロが跳ね上がる運動について

7 の実験で測った反発係数より、机では反発係数が高く、カーペットでは反発係数が低いので、サイコロがバウンドする回数は着地面の素材によって変化し、それによってサイコロの出る目の通り数が増えるので、サイコロの出現率に影響を与えているのではないかと考えた。

この考察を出すにあたって、サイコロのバウンドを観察している際に、実験室の机の上にサイコロを落とすと、サイコロのバウンドの高さがバウンドごとに不規則に変化することがわかった。(以後サイコロの変則運動と呼ぶ) その運動の特徴を調べるため実験室の机の上で 40cm の高さからサイコロを角が下を向くように力学台で固定して落とし、サイコロの変則運動をハイスピードカメラを使って撮影し、撮った映像から変則運動の様子を観察した。すると、サイコロが変則運動をする前のバウンドでサイコロは面ではなく角で着地することがわかった。また、サイコロの変則運動は、回転の速度が速く、なおかつ最高点の高さが低いバウンドをした後に、必ず回転の速度が遅く、なおかつ最高点の高さが高いバウンドをすることがわかった。このことから、サイコロの回転の速度とバウンド後の最高点の高さには逆比例の関係があるのではないかと考えた。そこで、バウンドの高さとその時の回転数を測ってみることにした。サイコロの変則運動を、ハイスピードカメラを使って 0.05 倍の映像でとり、その映像からサイコロの最高点が高いバウンドと最高点が低いバウンドの回転数を測る。その回転数を映像から得られた滞空時間で割り、1 秒当たりの回転数を求める。これを 10 回行い、滞空時間と回転数の関係を求める。結果は回転数を横軸に、バウンドの高さを縦軸にして図 21 にまとめた。図 21 よりサイコロの回転

数が大きくなればなるほどサイコロのバウンドの高さは小さくなる逆比例のような関係が見られる。また、何故このようになるかを考えてみる。回転数が大きいほど跳ね返る高さが低くなることから、回転にエネルギーが使われて位置エネルギーが減少したのではないかと考えた。また、回転の速さは面との衝突時の角度によって決まるのではないかと考えた。これらのことから、衝突時の角度が変化することで、サイコロが変則的な動きをするのではないかと考えた。また、こうした反発係数の高い面では、変則運動が起こることによってサイコロの回転の角度が大きくなり、サイコロの出現率のランダム性が増すのではないかと考えられる。

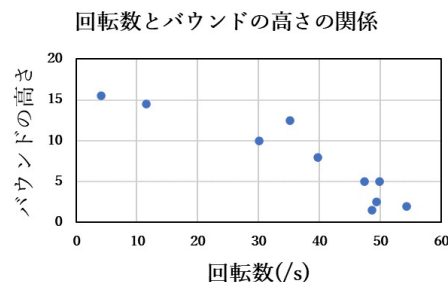


図 21 バウンドの高さと回転の速さの関係

9 まとめ

これまでの実験の結果から、サイコロの重心は加工することで、出現率に影響を及ぼすことができる。しかしながら、何の加工も施していないサイコロでは出現率に影響するほど重心はずれていないと考えられる。また、サイコロを水平に 5 cm の高さから落とすと、サイコロのバウンド数が 1 回のみになり出現率に偏りがうまれるが、5 cm より高い位置から落としても、出現率には大きく影響しないことがわかった。また、サイコロの着地する面の素材を変えることによって、反発係数変化し、サイコロのバウンド数が変化したり、回転の仕方が変化するため、出現率のランダム性に影響を与えていることが分かった。これらの結果から、サイコロの出現率にはサイコロの着地時の角度とバウンド数が大きく影響を及ぼしていると考えられる。

10 今後の課題

サイコロの変則運動が起こる際にサイコロは必ず面ではなく角で着地していることが確認できたので、サイコロと地面との角度がどのような時に変則運動が起こるのか、また、サイコロとの反発係数がどのぐらいの値より大きいとサイコロの変則運動が発生するのかを調べたい。また、出現率に影響を与える要素がほかにあるのかを調べていきたい。

11 参考文献

- (1)「サイコロの出る目の確率」奈良女子大学附属中等教育学校(2020) nwuss.nara-wu.ac.jp
- (2)「サイコロの出る目の確率の操作」福井県立高志高等学校 www.koshi-h.ed.jp
- (3)「体積の計算式 一部が欠けた球の体積」(2019.6) keisan.casio.jp
- (4)サイコロの目の確率は均等ではありません！実は一番出やすいのは5 frytiger.com
- (5)いかさまサイコロ～サイコロの重心と特定の目が出る確率の定量的関係～
https://www.naganoc.ed.jp/ina/B_educationalinfo/2017/kadaikenkyu/H29kadai_buturi2
- (6)高等学校 物理 physics 啓林館
- (7)高等学校 物理基礎 physics 啓林館