

〈第 39 回山崎賞〉

ドミノ倒しの運動と速さの関係

静岡県立下田高等学校
自然科学部 2年 岩瀬瑛太 鈴木泰晴

1. 背景

1-1. ドミノ倒しの研究意義

テレビ番組などで大規模なドミノ倒しを見てみると、間隔が異なるときや坂を上るときドミノの速度が変化していることが視覚的にわかる。またドミノの運動は状態の変化が伝わって遠く離れた場所で同じ変化が起きるといふ点で波の現象と似ており、地震波の走時曲線を描くための理科教育用モデル[文献1]としてもドミノ倒しは知られている。

1-2. ドミノ倒しの歴史

数字が書かれたゲーム用のドミノ碑は18世紀にヨーロッパで登場し、20世紀後半には本来の遊び方とは別にドミノ倒しがテレビ番組を通じて広まった。現在では模様を描いたり、階段を上らせたり、ドミノ倒しの様々な仕掛けが考案されている。

1-3. 研究のきっかけ

ドミノの運動は様々な要因が影響しており、これらの要因が進行速度にどのような影響を与えるのか正確にわかっておらず、未だにドミノが倒れる運動の正確なモデル化はできていない[文献2][文献3]。

私たちはドミノの間隔や上り斜面の角度の変化がドミノの進行速度にどのような影響を与えるのか、またドミノの速度が時間ごとにどのように変化するのかを計測し、記録にもとづいて新しい関係式を求めることを目的として実験を行った。

2. 方法

2-1. 水平面の運動の計測手段

スマートフォン搭載のカメラのスローモーション機能(120 fps)を用いた。間隔を1.2~2.2 cmの範囲で変えてドミノを並べ、それぞれ3回ずつ計測して速度の変化を調べた。なお、範囲をこの値に設定したのはドミノ倒しの運動に支障が出ない間隔にするためであり、速度の算出には計測した3つの値の平均値を用いている。また、速度と時間の値をドミノ牌5枚ごとのものとし、速度の算出にはそれぞれの区間で進んだ距離[cm]÷それぞれの区間で5枚全てが倒れ切るまでにかかった時間[s]の式を用いた。

2-2. 坂を上る運動の計測手段

水平面の運動と同様、計測にはスマートフォンのカメラのスローモーション機能(120 fps)を用いた。碑の間隔1.3cmに固定し、坂の傾きを 2.0° ~ 7.9° (0.035 rad ~ 0.138 rad)の範囲で変えそれぞれ3回ずつ測定し、斜面の傾きと倒れる速度の関係を求めた。数値には計測した3つの値の平均値を用いている。

3. 結果

3-1. 水平面の運動の計測結果

計測した結果は下の表のようになった。ドミノ牌の時間と速度の関係では、最初は正の加速度運動をし、やがて等速運動に切り替わっていることが分かった。なお、測定値からこの加速度運動は等加速度運動ではないということを示す結果が得られた。また、ドミノの間隔を狭くするほど、等速運動の速度は上がっていた[図1]。

ドミノの間隔	1.2 cm	1.7 cm	2.2 cm
等速運動での速さ	52.6 cm/s	45.9 cm/s	39.6 cm/s

3-2. 坂を上る運動の計測結果

計測した結果は下の表のようになった。斜面の角度と速さの関係において、最初は負の加速度運動をし、しばらくすると等速運動をするようになった。坂の角度が小さいほど終端速度は上がり、グラフの区間では速度が直線的に減少していくことが分かった[図4]。また、坂を延長しても速度の変化は見られず、斜面を上りながら倒れ続けた。

斜面の角度	2.0°	3.0°	5.0°	6.9°	7.9°
等速運動での速さ	38.3 cm/s	37.9 cm/s	33.5 cm/s	32.1 cm/s	30.6 cm/s

4. 考察

4-1. 水平面を倒れるドミノの運動の考察

計測した記録をそれぞれ、ドミノ牌の時間と速度の関係 [図1]、ドミノ牌の間隔と速度の関係 [図2]、ドミノ牌の間隔の平方根の逆数と速度の関係 [図2] に着目してグラフにし、私たちが計測したデータと先行研究のデータ [文献2][文献3] を比較した。等速運動の終端速度におけるドミノ牌の間隔と速度の関係では、ドミノ牌の間隔が狭いほど、終端速度が上がっていることが分かった。グラフは下に凸の曲線となった[図2]。横軸と縦軸をそれぞれ $x = 1/\sqrt{d}$ (d は間隔)、 $y = v$ (終端速度) で変数変換したドミノ牌の間隔の平方根の逆数と速度の関係では、グラフが原点を通る直線となり、相関係数は 0.99 以上であった。

また、等速運動での終端速度は「間隔の平方根に反比例」することが分かった。これら三つの結果が全て先行研究と一致していることから、私たちの測定が正確であると判明した [図3]。水平面の運動では、総じて等速直線運動へ切り替わるタイミングは、間隔が狭いほど早かった。

4-2. 坂を上るドミノの運動の考察1 (微分方程式を使用)

計測した記録を斜面の角度と速さの関係 [図4] に着目してグラフにした。私たちは斜面の角度とドミノが倒れる速度の関係を求めるために、ドミノが倒れる運動を物理の考えを用いて表そうとした。まずドミノ碑を回転体として考え、回転体の運動方程式を用いることで [式①] を出した。

$$[\text{式①}] \quad I \times \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgr \times \sin(\theta - \alpha)$$

文字	説明	具体値等
I	慣性モーメント	$I = 4mr^2$
θ	ドミノと斜面がなす角	変数 [rad]
t	ドミノが倒れ始めた時間	変数 [rad]
α	斜面の角度	定数 [rad]

文字	説明	具体値等
m	ドミノの質量	10 g
g	重力加速度	9.8 cm/s ²
r	ドミノの高さの半分	2.3 cm

さらに、 $0 \leq \theta \leq 0.264$ かつ $0.035 \leq \alpha \leq 0.120(\text{rad})$ であり、十分に小さいため $\sin(\theta - \alpha) = \theta - \alpha$ と近似して非同次二階線形微分方程式を解き[式②]を出した。 θ は t の関数である。なお、 e は自然対数の底である。

$$\text{[式②]} \quad \theta = C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t} + 0.264$$

文字	説明	具体値等
l	ドミノ間の距離	-
k	定数を文字で置いた	$k = mgr/l$
v	ドミノの倒れる速度	変数 [cm/s]

文字	説明	具体値等
C_1	二階微分方程式を解くため	定数
C_2	二階微分方程式を解くため	定数

定数 C_1 、 C_2 を出すために測定値を代入して求めた。さらにドミノ間の距離を倒れた時間で割ることで速度を出し、斜面の角度と倒れる速度の関係式[式③]を出した。なお、 \exp は e の指数関数である。

$$\text{[式③]} \quad \alpha = 0.377 \exp\left(\frac{12.4}{v}\right) - 1.03 \exp\left(-\frac{12.4}{v}\right) + 0.264$$

4-3. 坂を登るドミノの運動の考察2

測定値の誤差をなくすために斜面の角度と倒れる速度の関係式を出す過程で測定値のいらぬ方法を考えて。ドミノの角速度に注目した。次のドミノに伝わる運動量を考えて[式④]を出した。

$$\text{[式④]} \quad I \times \omega_0 = I \times \cos \beta \times \omega_1$$

文字	説明	具体値等
I	慣性モーメント	$I = 4mr^2$
ω_0	ドミノが倒れ始めたの角速度	-
ω_1	次のドミノに当たる瞬間の角速度	-
β	ドミノが次のドミノに衝突した時のドミノと斜面がなす角	$\cos \beta = 0.853$

次にドミノが倒れ始めたときと次のドミノに当たる直前で力学的エネルギー保存則が成り立つとすると[式⑤]を出した。ただし、 $1/2 \times (\text{慣性モーメント}) \times (\text{角速度})^2$ は運動エネルギーであり、左辺は倒れ始めと次のドミノへ当たる直前の運動エネルギーの変化量、右辺は位置エネルギーの変化量を表す。

$$\text{[式⑤]} \quad \frac{1}{2} I \omega_1^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = mgr(1 - \cos \beta) \cos \alpha$$

文字	説明	具体値等
m	ドミノの質量	10 g
r	ドミノの高さの半分	2.3 cm

文字	説明	具体値等
g	重力加速度	9.8 cm/s ²
α	斜面の角度	定数 [rad]

さらに、 $v_0 = 2r\omega_0$ と $v_1 = 2r\omega_1$ が成り立つから、式を変形して[式⑥]を得られる。

$$[\text{式⑥}] \quad v_0 = \sqrt{\frac{2rg\cos^2\beta}{1+\cos\beta}} \cos\alpha = 42.1\sqrt{\cos\alpha}$$

文字	説明	具体値等
v_0	ドミノが倒れ始めた速度	-
v_1	次のドミノに当たる瞬間の速度	-

考察1、2で得られた2つの関係式[式③]と[式⑥]をグラフにした[図5]。理論式から斜面の角度が大きくなるほどドミノが倒れる速度が単調に減少することが分かった。理論式の値と計測した値を比較すると $\alpha=0$ すなわち水平面を倒れるときの速度は誤差20%で一致することが分かった。

4-4. 反省と課題

今年度の研究では、木製の地面とプラスチックのドミノで実験した。理論値と計測値の誤差の原因としてドミノ碑が滑ったことが影響したことが考えられる[文献4]。よってドミノが滑らないように摩擦の大きい床材で実験をし、測定値を出せば理論値に近づくと考えられる。

5. 謝辞

本研究は静岡県立下田高校自然科学部（顧問：吉田亮祐教諭）の活動の一環として行われました。ドミノ碑を購入するため、下田高校生徒会から支給される部費に加えて、昨年度の山崎賞賞金を使用しました。本論文は、今年度の静岡県生徒理科発表会東部大会で最優秀賞をいただき、同県大会で発表したものにデータを付け加えてまとめたものです。

6. 参考

[文献1] 産総研地質調査総合センター『ドミノを使った地震波モデル実験』

http://www.gsj.jp/date/shishitsunews/2010_05_02.pdf

[文献2] W. J. Stronge "The domino effect: a wave of destabilizing collisions in a periodic array." *Proc. R. Soc. A* (1987)

<https://doi.org/10.1098/rspa.1987.0013>

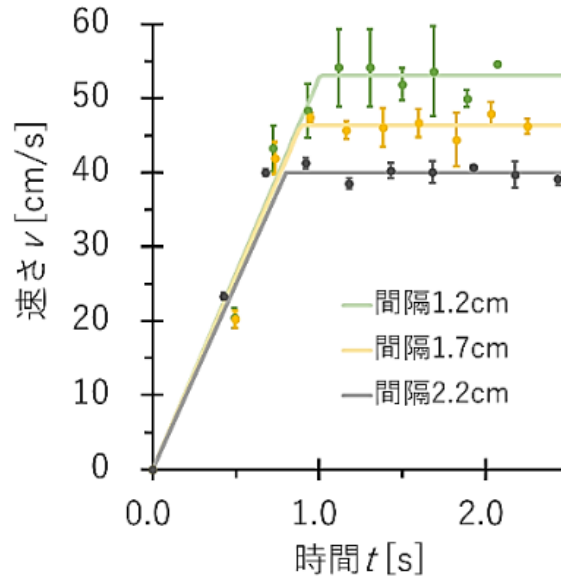
[文献3] B. G. McLachlan ら "Falling dominoes." *SAIM Review* (1983)

<https://doi.org/10.1137/1025085>

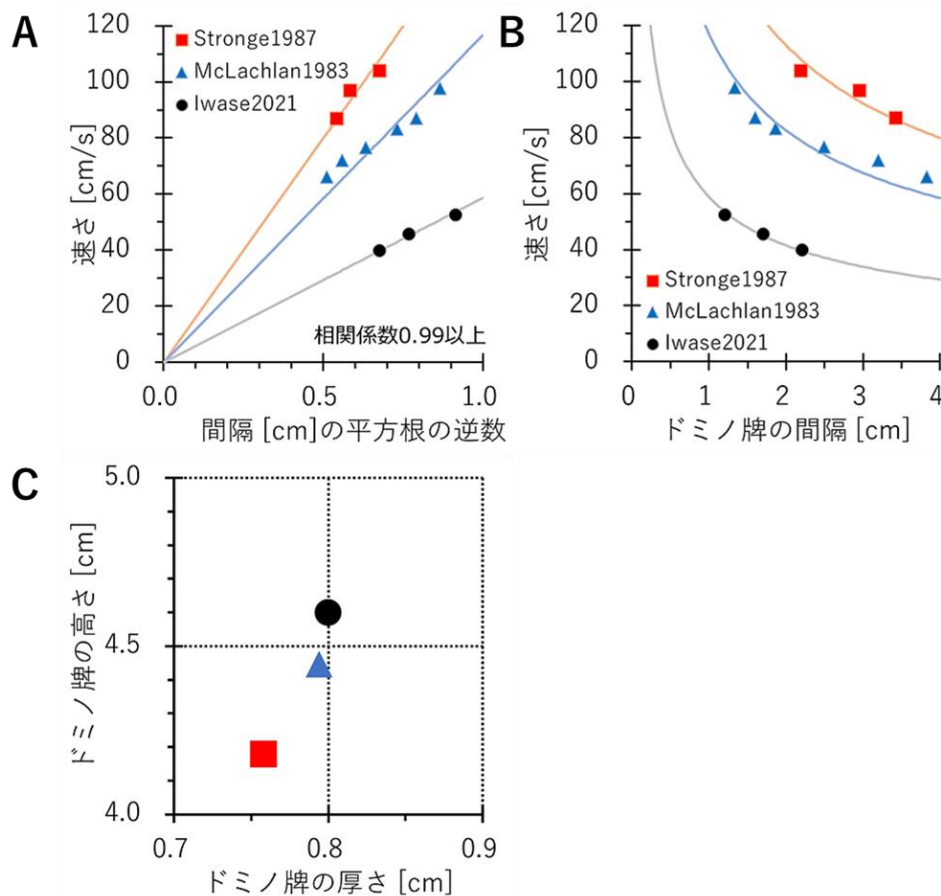
[文献4] David Cantor ら "Effects of friction and spacing on the collaborative behavior of domino toppling." *Phys. Rev. Applied* (2022)

<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.064021>

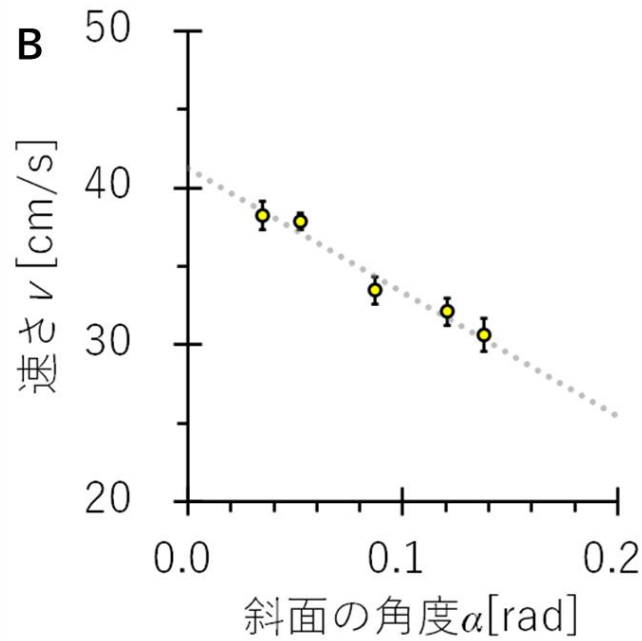
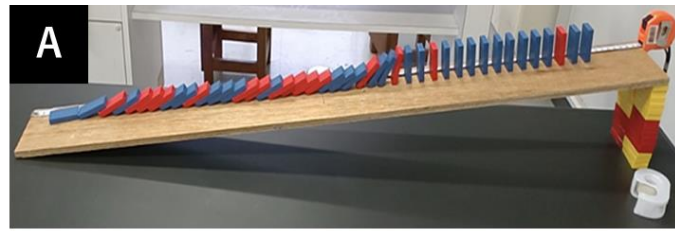
7. 図表



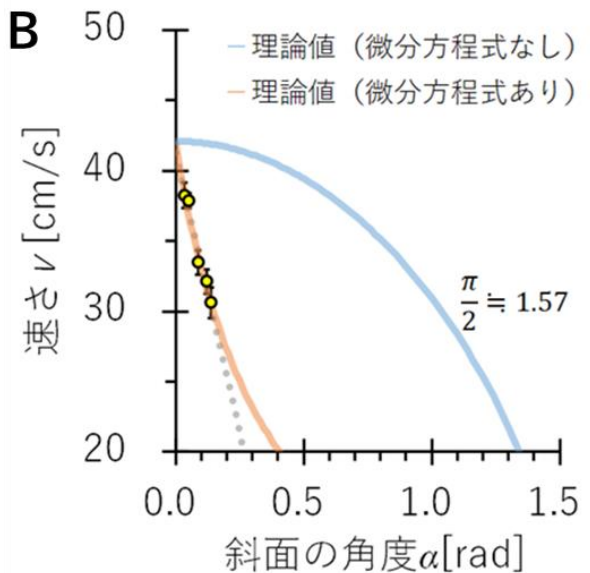
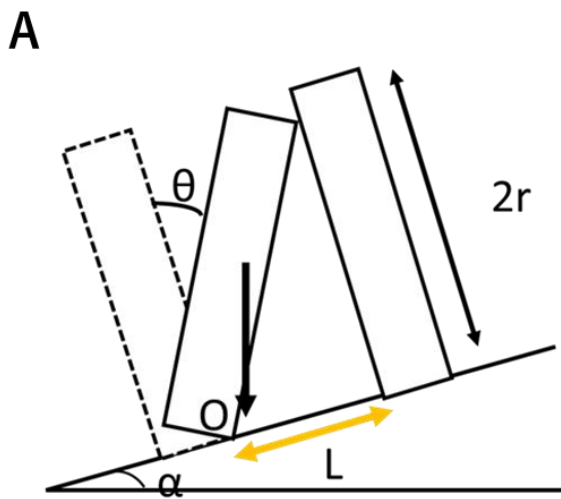
[図1]各間隔における時間ごとの速度の変化。誤差棒は標準偏差である。どの間隔でも最初は加速度運動をしたのち等速運動をすると分かる。また間隔が狭いほど終端速度が大きくなることが分かる。



[図2]終端速度と間隔の関係。黒点 (Iwase2021) は今年度計測したデータであり、先行研究と比較したものである。Aは間隔と速さの関係、Bは間隔の平方根の逆数と速さの関係を表している。Bのグラフから相関係数が0.99以上であることから、先行研究と同様にドミノが倒れる速さは間隔の平方根に反比例すると考えられる。Cは先行研究と今回用いたドミノ牌の高さと厚さである。



[図3] 斜面の角度と倒れる速さの関係。Aは実験風景の写真。Bはグラフ。誤差棒は標準偏差である。斜面の角度が大きくなるほど速さは小さくなり、直線的に減少することが分かる。



[図4]. Aは坂を上るドミノの運動を物理の視点から考えた図である。Bは2つの理論式と測定値の比較。黄色の点が測定値で誤差棒は標準偏差である。