

1 屈折率勾配を持つ溶液に出現する虚像の時間変化と位置

1. はじめに

真水を入れた水槽の底にショ糖の飽和溶液を静かに注入して放置すれば(写真1)、時間の経過とともに溶質であるショ糖は水面に向かって拡散し、やがて濃度に応じて屈折率が水面に向かって連続的に変化した溶液が形成される。このような溶液を「屈折率勾配を持つ溶液」と呼ぶ。この溶液に現れる美しい光学現象について、私たちは平成 20 年度より研究に取り組んできた。

2. 本年度の研究の目的

- (1) 水槽内の溶液中の屈折率分布を一定時間ごとに測定し、時間経過による変化の特徴を調べる。
- (2) 昨年度は、水槽をとおして背後の物体を観察したとき出現する虚像の様子を、屈折率分布の測定値から求めた実験式に光線追跡の理論を適用して理論的に再現することに成功した。本年度は、同じ理論が虚像の時間経過の様子まで再現することができるかどうかを確かめる。
- (3) 水槽をとおして出現する 3 つの虚像の位置関係について解析を行う。

3. 研究の方法

(1) 溶液の作成方法

ショ糖の飽和溶液を水底に静かに注入する(写真1)。溶質は、水槽の底から水面に向かって拡散していくので、濃度に応じて屈折率が連続的に変化した溶液ができる。溶質は水槽の底から 40[mm]まで注入する。

(2) 屈折率分布の測定方法

水槽の角に、側面からレーザー光を照射すると、内部の屈折率に応じて光の偏角が変化するので、この偏角から屈折率分布を計算で求めることができる。これを「水プリズム法」と命名している。

(3) 光線追跡の理論

光線の進路の微少部分ごとに屈折の法則を次々に適用して、光線経路を理論的に再現することを光線追跡と呼ぶ。平成 21 年度には、この理論的な手法を確立し、光線経路を再現することに成功している(参考文献3)。

ある水深 y における屈折率 $n(y)$ が分かれば、光線経路を狭い区間で直線近似することで、隣接する 2 点を光線が通過するときの座標間の関係は右の 2 式で求められる。

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \sqrt{\left(\frac{n(y_i)}{\alpha}\right)^2 - 1} \times \Delta x$$

数式 1 理論式

(4) 虚像の見え方を再現する手法について

観測者に対してある仰角に物体の虚像が見えるかどうかは、その光線を物体側へと逆にたどった先に本物の物体が存在するかどうかを調べればよい。そこで、観測者が見上げる各仰角ごとに、光線追跡を物体側へとおこなって、その結果を上下に並べれば、観測者側からみた虚像の様子が理論的に再現できることになる。



写真1 溶液(左)と虚像(右)

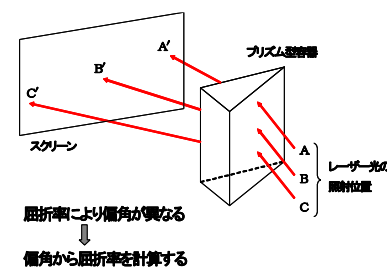


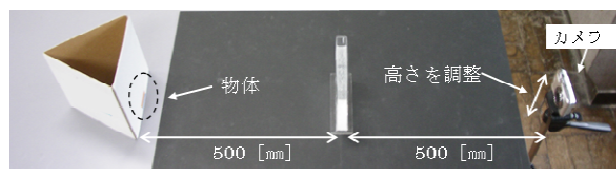
図1 水プリズム法

4. 研究の結果 1 ～時間経過による屈折率分布と像の見え方の変化～

(1) 測定方法

ア. 実験装置と実験方法

屈折率勾配を持つ溶液の入った水槽を通して、水槽背後の物体を観察すると(写真2)、複数の虚像が出現する。物体として、3色に水平方向に塗り分けた縦15[mm]



↑ 写真2 装置の配置

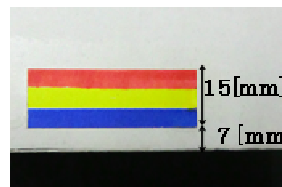


写真3 観察する図形

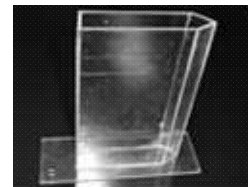


写真4 水槽

の図形(写真3)を作成し、観察することにした。時間経過とともに変化する屈折率分

布と虚像の様子とを、同じ水槽で観察できるようにするため、溶液を入れる水槽は写真4の形状のものをアクリルで自作した。鋭角状の部分は、水プリズム法で屈折率分布の測定をするためのものである。温度管理にも気をつけ、恒温槽を使用し、水温は30℃に保った。

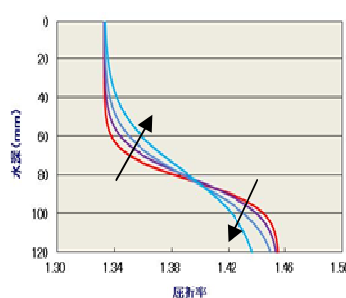
イ. 観測される虚像の定義

溶液をとおして観察すると、最大3個の虚像が写真1(右)のように出現する。私たちはこの虚像を上に見えるものから、像A、像B、像Cと命名している。虚像は、時間の経過によっても変化する。24時間ごとに観察することにして、拡散直後(0時間後と呼ぶ)、24, 48, 72, 96時間後の計5回の観測を実施する。この一連の実験を以下では「1観測」と呼ぶ。

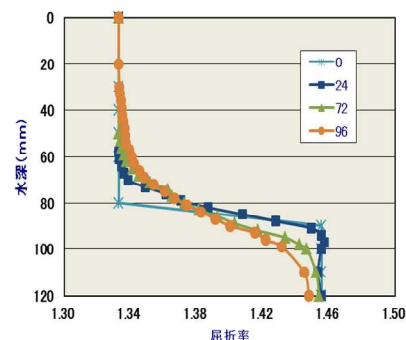
(2) 屈折率分布の変化

ア. 予想

拡散に伴う濃度分布の変化から、溶液内部の屈折率分布のグラフは、時間経過に伴いグラフ1の矢印の向きに変化していくと予想した。縦軸は水深、横軸は屈折率を表す。



グラフ1 変化の予想



グラフ2 測定結果

イ. 測定結果

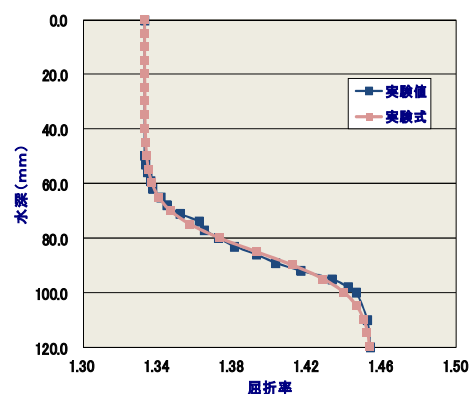
数回の観測を実施した。溶液内の屈折率分布の時間変化について、観測結果の一例をグラフ2に示す。縦軸は水深[mm]、横軸は屈折率である。時間経過に伴う屈折率分布の変化する様子は、グラフの傾きの変化や、収束する位置に関して、我々の予想が正しかったと考えられる。

ウ. 実験式と微分係数の変化

屈折率分布の測定結果から、屈折率分布の実験式を求めた。グラフの形状から、下の関数形を使用した。この式において、yは水面からの距離、eは自然対数の底である。A～Eは定数で、その値は実験結果のグラフと近いグラフになるように決定する。

$$n(y) = \frac{D}{A + B \times e^{C(E-y)}} + 1.33$$

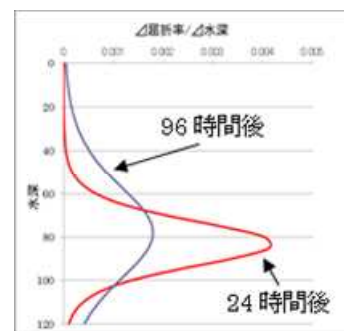
数式2 実験式



グラフ3 実験式

拡散開始から 24 時間後と 96 時間後においてそれぞれ得られた屈折率分布の実験式に対して、水深における屈折率 n を水面からの距離 y で微分し、変化率を求めその結果をグラフ化したものが右のグラフ 4 である。縦軸は水深 y を、横軸は水深に対する屈折率の変化率 $\Delta n / \Delta y$ を表している。

$\Delta n / \Delta y$ の値は、屈折率の変化が大きいところほど大きくなる。したがって、ショ糖溶液と水が混ざり合う境界付近では、値が大きくなり、水面または水底近くでは値が 0 に近くなることが予想されていた。



グラフ 4 屈折率の変化率

エ. 考察

このことを踏まえたうえで微分結果を見てみる。24 時間後におけるグラフのピークは、水面から測って 80[mm] 付近、すなわち最初にショ糖の飽和溶液を注入したときのショ糖と水との境界面位置（水底から 40[mm]）とほぼ一致していた。それ以外の水深では値は小さくなっている。

また、水深に対する屈折率の変化率が最も大きな位置は、拡散した時間の経過にかかわらずほぼ一定で、溶質を水底に注入した時の、水と溶質との最初の境界位置からほとんど変化していないことも分かった。

(3) 観察される像の変化

ア. 結果

水槽背後の図形を観察した場合に見られる虚像の様子を写真 5 に示す。時間は、ショ糖飽和溶液を水底から拡散させてからの経過時間である。いずれも、24～96 時間後、水槽から 500[mm] 離れた位置で、水槽より 10[mm] 高い位置にカメラを設置し、定点撮影をした結果である。

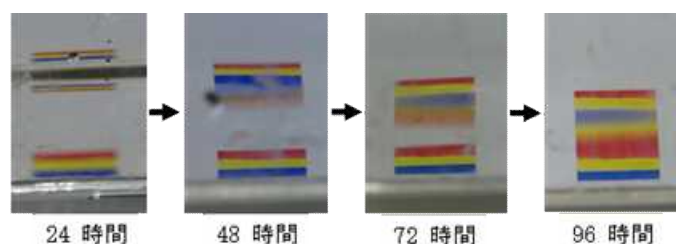


写真 5 経過時間と虚像の変化

最初は上下方向に縮んで観察されていた像 A と像 B が、次第にもとの大きさに戻って見えていることや、3 つの像が相対的に近づいていることがわかる。

イ. 考察

像 A と像 B の見える位置が下側に移動している理由は、屈折率分布の時間変化で説明できる。像 A と像 B は、水深 77[mm] ほどの深さの点を通してカメラに届いており、その水深は、屈折率の変化が大きな水深である。さらにこの水深における屈折率の変化は、24 時間後の方が 96 時間後よりも大きい。

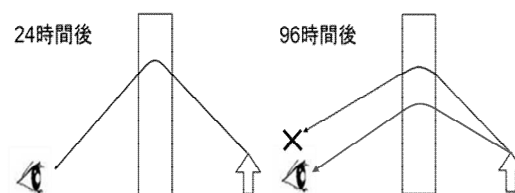


図 2 時間経過による像の移動の原理

光は屈折率の変化の大きなところほど大きく曲がる。24 時間後の溶液では、物体から出る光は大きく屈曲して届くため、観測者側には大きな仰角で光線が届くことになるが、96 時間後の溶液の場合、光線は観測者側に緩い曲率で曲がって届くため、仰角も小さくなる。仰角が時間とともに小さくなるのが、虚像が下降して見える理由である。

ウ．理論計算による虚像再現

計算は表計算ソフトを利用し、プログラムは自作した。とくに今年度は、プログラムを新規に作り直し、昨年度よりも精度を上げて計算し、時間経過とともに変化する様子を再現することを試みた。

その結果、図3のように再現することに成功した。最初は上下に縮んで観察されていた像Aと像Bが、もとの大きさに戻って見えてきてい

ることや、3つの像が相対的に近づいてきて最後に像がつながっていく様子なども再現できている。

観察する高さ（カメラの高さ）を変えた場合に見られる虚像の様子についても、計算結果は実際の虚像の変化を再現した。

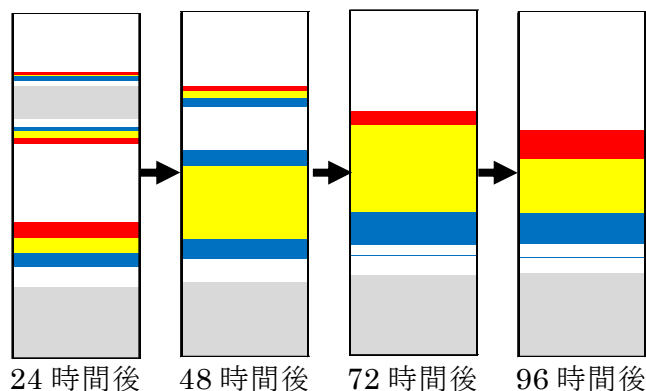


図3 再現した虚像の様子

5. 研究の結果2 ～虚像のできる位置はどこか～

虚像の写真を数多く撮影していく中で、私たちは観察される3つの像に対して、同時にピントを合わせることはできないことに気付いていた。そこで、像までの距離を調べることにした。

(1) 仮説

デジタルカメラで撮影する際、マニュアルフォーカスで3つの像にピントを合わせようとしても、すべての像に同時にはピントが合わない。どの写真においても、1つの像しか、鮮明に映っておらず、像Aと像Cも同時にはピントが合っていなかった。この事実から、私たちは次の仮説を立てた。

仮説 3つの虚像はそれぞれ違う位置に出現する。特に像Aと像Cの位置に対して像Bの位置は大きく差がある。

(2) レンズの結像公式を利用した測定

虚像（像A、像B、像C）をそれぞれ1つの「物体」とみなして取り扱う。凸レンズにより、レンズ後方のスクリーンに投影される実像までの距離

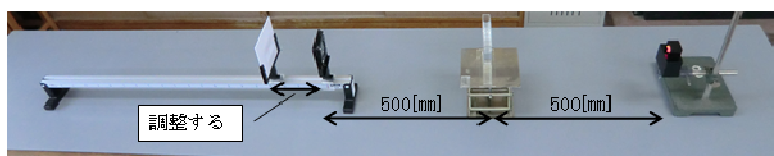


写真6 実験装置の配置

を測定すれば、レンズから「物体」（虚像）までの距離はレンズの結像公式によって計算で求めることができると考えた。

実験装置を写真6のように配置した。光源（発光ダイオード）と凸レンズ（焦点距離 $f = 150[\text{mm}]$ ）は、それぞれ水槽の前後に $500[\text{mm}]$ 離して設置した。

(3) 予備実験

スクリーン上に投影するための準備として、最初に真水を入れた水槽を使って実験した。その結果、水槽の後方に設置した発光ダイオードが、水槽と凸レンズを通して確かにスクリーン上に実像として写ることが確認できた。こうして、この方法は有効に使用できることが分かった。

(4) 像A、像B、像Cの投影

屈折率勾配を持つ溶液の入った水槽の後方に配置した発光ダイオードで実験を試みたところ、不鮮明な像も含めて写真7のように3つの像を映すことができた。ただし鮮明な像を映すことができたのは像Aだけであった。

(5) 実験結果

レンズの結像公式から、像Aは実際の物体の位置よりも約 100[mm]ほど観測者側に近い位置に見えていることが分かった。

他の虚像については、その実像を鮮明に映せなかったため、3つの虚像の相対的な位置関係は把握することができなかった。

しかし、カメラで合焦操作をした結果からは、像Bが像Aより近くに見えていると分かった。像Cは像Aの近傍に出現しているが、位置の前後関係は明確にはわからないままであった。

現時点では、私たちの仮説は、3つの虚像がそれぞれ違う位置に出現するという点に関しては、正しいと分かった。

(6) 考察

3つの虚像のうち、この実験で像Aの出現位置は測定することができた。しかし、溶質であるショ糖を拡散させてからの経過時間を統一せず、さまざまな経過時間で測定をしていたために、像Aの位置の測定結果には大きなばらつきが出てしまった。

今後は経過時間を考慮したうえで実験をし、さらに正確な測定をしていきたい。

(7) 虚像の位置を求める理論的手法

出現する虚像（像A、像B、像C）の位置を理論的に計算で求める方法は、現在次のように考えている。

物体から出た光線を複数本追跡して、最後に観測者側に向かってくる角度を求めれば、その光線経路を逆方向に延長した先の交点に像が見えていると考えられる（図4）。

今後は、この手法で研究を進めていく予定である。

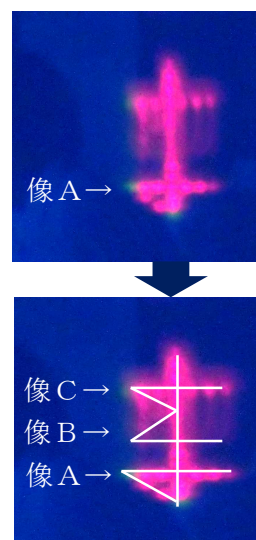


写真7 映った像

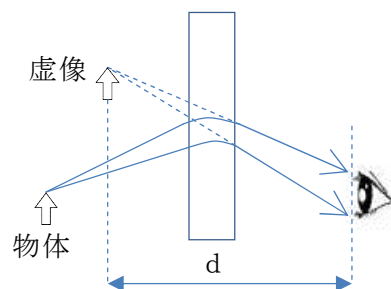


図4 虚像の位置の計算方

6. 全体の考察・今後の課題

- (1) 拡散により生じた溶液中の屈折率分布の時間変化を、これまでよりも長時間にわたって測定し各経過時間ごとに実験式を求めることができた。
- (2) 求めた実験式を光線追跡と虚像再現の計算手法に適用した結果、時間経過とともに変化する像の様子を理論的に再現することに成功した。この結果、私たちの理論は虚像出現の現象を説明できることが分かった。
- (3) 3個の虚像は異なる位置に出現していることが分かったが、正確な位置を測定することや、理論計算をするまでには至らなかった。今後の課題としたい。
- (4) ショ糖以外の溶質でも溶質の質量や電気量の差などによる拡散速度や像の見え方の違いについて調べたい。

7. 参考文献

(1) 屈折率勾配を持つ溶液における光学的性質の研究

清水東高自然科学部 平成22年度理科研究論文集

(2) 屈折率勾配を持つ溶液に現れる虚像の研究

池田浩太、他

清水東高平成22年度理数科課題研究論文集

(3) 光線追跡による蜃気楼モデルの解析

清水東高自然科学部 平成21年度理科研究論文集

(4) 蜃気楼モデルと屈折率分布の研究

清水東高自然科学部 平成20年度理科研究論文集

(5) 拡散により生じた屈折率分布の研究

清水東高自然科学部 平成19年度理科研究論文集