

2 光線追跡による蜃気楼モデルの解析

1. はじめに

水槽の底にショ糖の飽和溶液を静かに注入すると、溶質であるショ糖は時間の経過とともに水 面に向かって拡散していく。1 日ほど経過すれば、この溶液の内部はショ糖の濃度に応じて、屈折率が水面に向かって連続的に変化した状態になる。この水溶液を通して、水槽の反対側に置かれた物体を眺めると、その物体の複数の虚像が見える。

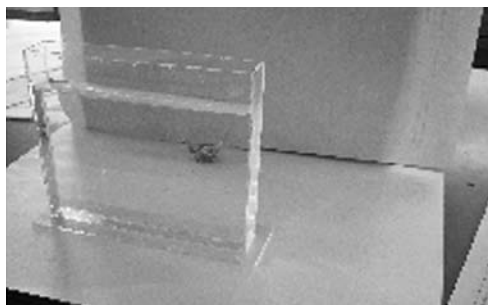


写真1 水槽と折り鶴

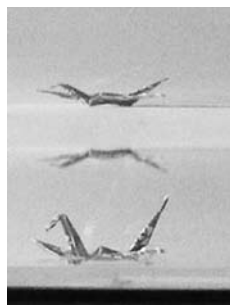


写真2 虚像

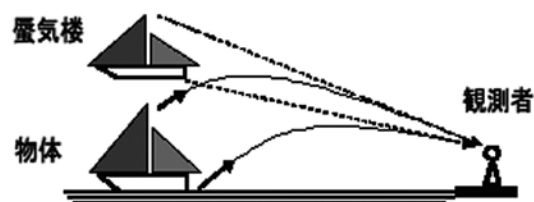


図1 上方蜃気楼

例えば写真1のように、この水槽の向こう側に折り鶴を置いて、ある角度から水槽を通して眺めると、写真2のように折り鶴の複数の虚像が水槽の向こう側に浮かび上がって見える。これは光が上側に凸の曲線を描きながら進むため、像が上方に浮き上がって見える「上方蜃気楼」と呼ばれる現象に相当すると考えられる（図1）。私達はこの現象を「蜃気楼モデル」と名付けて、溶液中における屈折率分布の測定と関連づけて研究している。昨年度の研究では、虚像の見え方について、

- (1)像が3 個見える場合には、中央の像だけが上下反転している。
 - (2)虚像を観察するには、屈折率勾配が急激に大きくなる水深の近傍から水槽を覗けばよい。
- ということなどが分かった。

2. 研究の目的

今年度は溶液中の光線経路を解析し、特に反転像の見え方の解明を目指した。研究の目的として、

- (1)溶液が屈折率勾配を持つことにより生じる各種の現象について調べる。
- (2)屈折率分布を測定して実験式を求めるとともに、光線経路の数値解析をおこなう。

以上の視点から研究をおこなった。

3. 研究の方法

(1)溶液の作成方法

実験用の水槽は、ゴムチューブをつけた注射器を使い、溶質の飽和溶液を水槽の底に静かに注入して準備する。溶質は水面に向かって拡散し、時間の経過とともに、濃度に応じて屈折率が水深ごとに連続的に変化した溶液ができあがる。この溶液は、翌日には実験に利用できる。

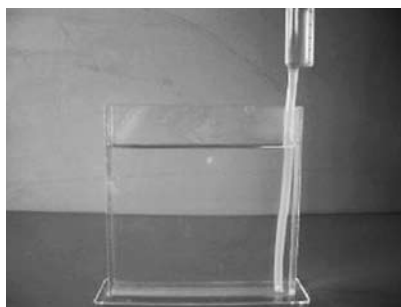


写真3 溶液の作成

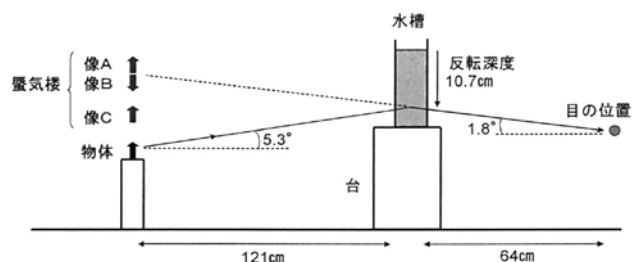


図2 像の観察結果の一例

(2) 像の分類

図2は、虚像の観察結果の一例である。物体と水槽、及び観察者の目の位置関係を表わしている。写真4は、水槽の向こう側にサカナの模型を置き、反対側から覗いたときの写真である。像が3個、水槽の向こう側に浮かび上がっている。私達は、一番上側から像A、B、Cと命名することにした。像AとCは正立像であるが、中央の像Bだけは上下が反転している。

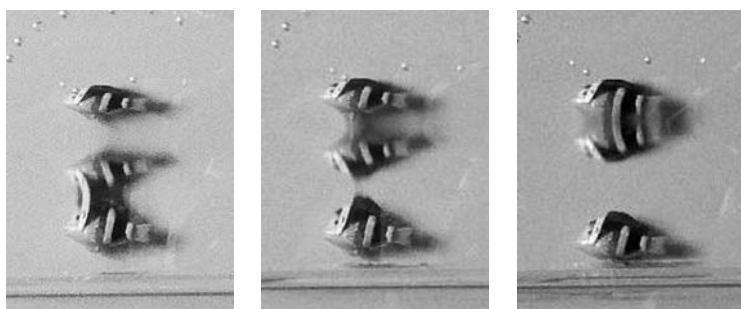


写真4 視点による、虚像の見え方の変化

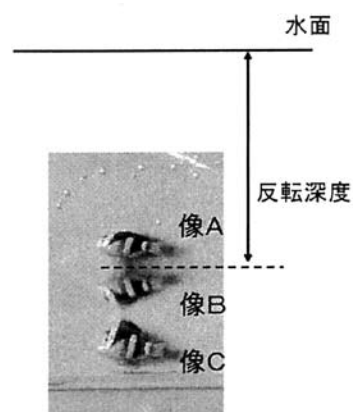


写真5 反転深度の定義

これらの像は、水槽をのぞき込む角度によって数や形が変化する。定量的な取り扱いを可能にするため、上側の正立像Aと、その下の反転像Bとが接して見える視点を基準とし、常にこの見え方をする位置から像を観測することにした。私達はこの深さを「反転深度」と呼び、水槽を側面から覗きこむ場所の水深で測定した。

(3) 屈折率分布の測定方法

水槽内部の屈折率分布の測定には、一昨年に開発した測定法を採用した。溶液の入っている水槽の角をプリズムに見たて、それぞれの水深に入射したレーザー光線の偏角から、各水深の屈折率を計算で求めるという方法である。

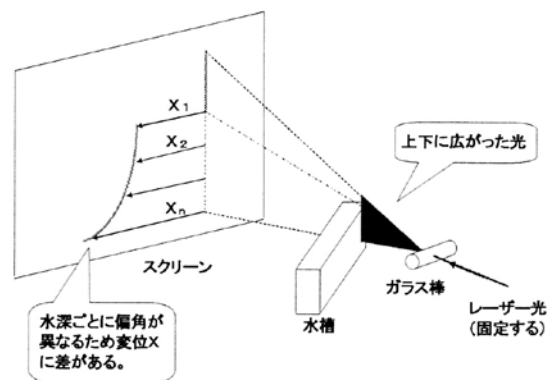


図3 屈折率分布の測定の原理

4. 研究の結果

それぞれの虚像に対する光線経路について昨年度にまとめた結果を図4に示す。この図は、像が3個見える場合のものである。上側の正立像Aと下側の正立像Cが見える原理は、普通のガラスや水槽をとおして向こう側を見る場合と基本的に同じである。それぞれ、真水に近い領域と飽和に近い領域をとおして物体を眺めている。物体の各点から出た光の角度の大小関係は保たれているので、上下の反転なく観測者の目に届く。

これに対して中央の像Bは、なぜ上下が反転して見えるのだろうか。私たちは、反転像Bに対する光線経路について、次の仮説を立てて研究を進めた。

仮説：反転深度の近傍では、屈折率勾配が最大になっているので、水深のわずかな差でも屈折率が大きく変化し、物体の上側から発した光線よりも下側から発した光線の方が溶液内部で大きな角度で進路が曲げられるため、反転像が出現する。

この仮説を検証するため、光線経路の数値解析ができることを目指して研究を進めた。

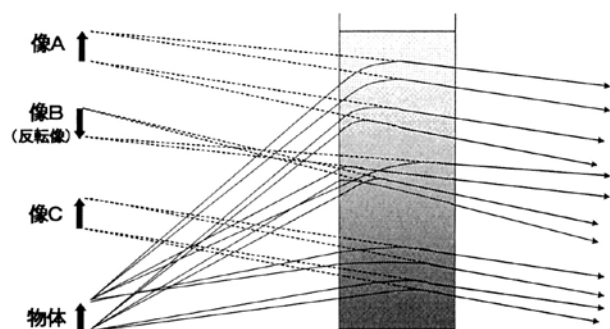
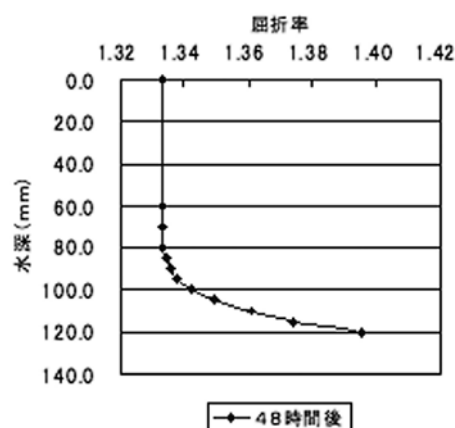


図4 光線経路



グラフ1 屈折率分布

(1)屈折率分布の測定

屈折率分布の測定結果の一例をグラフ1に示す。ショ糖の飽和水溶液を水底より拡散させてから24時間経過した後の屈折率分布である。縦軸は水深を、横軸は屈折率を表している。水面から測ったある深さのところに、屈折率の変化が急激に大きくなる場所が存在する。同時に測定をした反転深度の位置は水深が約116mmのところであった。両者の水深は非常によく一致していることがわかる。反転した像が見える原因となるのは、屈折率勾配が最大になる水深の近傍を通過した光と考えられる。

(2)屈折率勾配の変化による光線経路の屈曲の大きさの測定

屈折率勾配を持つ溶液が、ある特定的水深において、入射した光線を大きく下側へ屈曲させるはたらきを持つことを実験で確認した。図5に示すように、入射角を固定したまま、光が入射する水深だけを変化させて、スクリーンに到達する光の位置の変化を調べる実験をおこなった。水槽の各水深に対して、外側から水平にレーザー光を照射する。水槽の反対側にスクリーンを置き、溶液通過後に到達するレーザー光の位置を記録する。ショ糖を水底から拡散させて24時間後の溶液で測定した結果の一例をグラフ2に示した。横軸は、照射水深の水底からの高さを表し、縦軸はレーザー

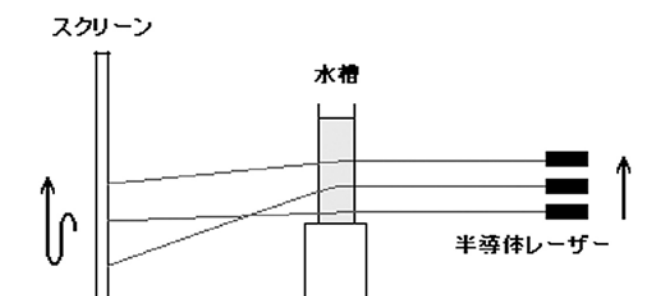
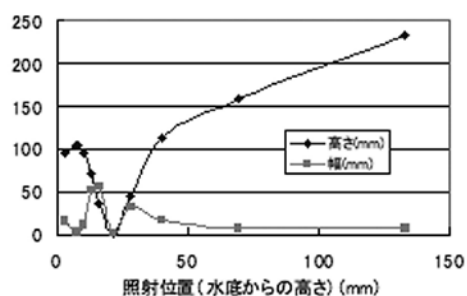


図5 照射位置による光線経路の屈曲の差



グラフ2 光の到達点と光線幅の変化

光の到達位置を表している。照射するレーザー光の水深位置を、水底近くから水面方向へと変化させていけば、スクリーンに到達するレーザー光の位置も初めは上方へと移動していく。しかし、水底から約10mmよりも高い位置にレーザー光を照射すると、スクリーンに到達するレーザー光の位置が下がりはじめ、水底より約20mmの照射位置では、スクリーンの最下部にレーザー光が到達する。この水深を反転深度と比較してみたところ、非常によく一致していた。このことは、反転深度付近では入射した光が大きく下側へ曲げられることを示す。このグラフには、スクリーンに到達する光の光線幅の変化も重ねて示してある。

(3)光線追跡の理論

溶液中の鉛直な平面内を通過する図6のような光線を考える。屈折率が n_1, n_2 である水深を光線が通過するとき、光線の角度をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とおくと、屈折の法則により、

$$n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 \right) \equiv \alpha \quad (\text{一定値})$$

この関係は任意の水深で成立する。したがってある水深 y における屈折率、光線の傾きの角をそれぞれ $n(y), \phi(y)$ とおくと、常に次の関係が成り立っている。

$$n(y) \cos \phi(y) = \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

光線経路を、ごく狭い範囲では直線であると見なすことにより、 x 座標が Δx だけ変化したときの y 座標の変化を Δy とすると、次の式が成り立つ。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi(y) \quad \dots \textcircled{2}$$

①式を②式に代入すれば、次の③式が得られる。③式を適用することで、溶液内部を進む光線

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{n(y)^2 - \alpha^2}}{\alpha} \quad \dots \textcircled{3}$$

の経路を求めることが可能になる。いま、点 $P(x_i, y_i)$ を通過した光線が、その近傍にある点 $Q(x_{i+1}, y_{i+1})$ を通過するものとする。点 Q の x 座標が点 P よりも Δx だけ離れているとすれば、

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad \dots \textcircled{4}$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \sqrt{\left(\frac{n(y_i)}{\alpha} \right)^2 - 1} \times \Delta x \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。この④式、⑤式を適宜あてはめていけば、次々と光線経路を求めることができる。

(4)屈折率分布の実験式

上の④式と⑤式を適用し、水溶液中の光線経路を再現するためには、水溶液中における屈折率 n と水深 y との関係を知らなければならない。そこで、これまでに蓄積してきたデータから、

ア. 水底近傍の溶液が、まだ飽和状態になっている場合を考える。

イ. 水底が飽和状態の場合、水底に近づくにつれて屈折率は一定の値に収斂する。

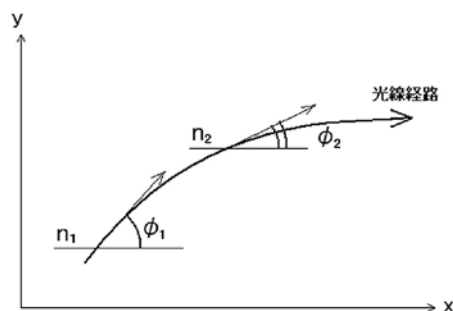


図6 屈折率と光線の角度



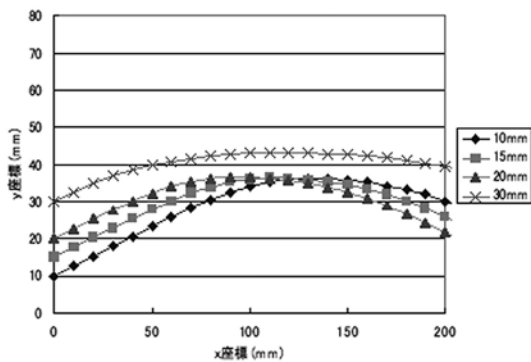
写真6 レーザー光線の屈曲の様子

$$n = \frac{0.38}{5.1 + 0.0011e^{\frac{y}{4}}} + 1.332$$

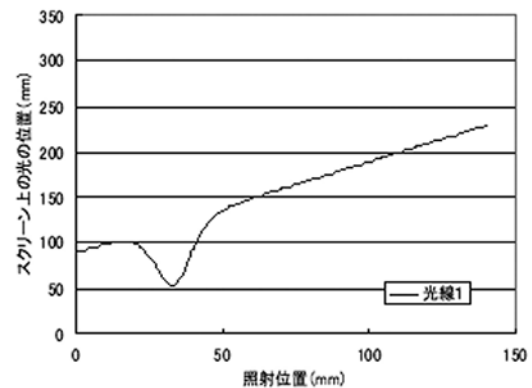
という考察のもとに、水溶液中における屈折率と水深との関係を表す実験式として、次の式を仮定することにした。この式で n は屈折率、 y は溶液中における水底からの高さを表している。水底から25mmの高さまで溶質の飽和溶液を静かに注入したあと、24時経過させたときの一般的な屈折率分布である。

(5) 光線追跡の結果

屈折率分布の実験式を、先程の計算式にあてはめ、光線が通過していく座標を理論的に求めてみた。これを光線追跡と呼ぶ。グラフ3は、解析の結果の一例である。各水深に対して仰角15度で光を左側から入射させた場合の光線経路である。縦軸 y は水底からの高さ、横軸 x は水平方向の位置



グラフ3 光線追跡で求めた光線経路



グラフ4 光線追跡で求めた光の到達点の変化

である。入射する高さ y が10mmから20mmの範囲では、高さ y を高くするほど光は大きく屈曲し、水槽の右端に到達する光線の高さが次第に低くなることがわかる。この結果は、実際の光線の様子(写真6)を再現しているばかりではなく、ある特定の水深で光線が大きく屈曲することを確認した先ほどの実験結果を非常によく説明できる。

さらに、スクリーンへの光の到達点の変化を測定した先述の実験結果(グラフ2)を、光線追跡で再現できるか解析を試みた。グラフ4は、その結果である。横軸は照射位置の水底からの高さ、縦軸は光の到達位置で、グラフ2と同じ座標軸にしてある。仰角を5度を選んだ場合のものであるが、実験で得られた結果を非常によく再現した。

5. 考察

今年度の研究を考察すると、次のようにまとめることができる。

- (1) 光線追跡の計算方法を確立し、光線経路の屈曲の様子をよく再現することができた。
- (2) 屈折率勾配が小さければ、光線は像の上下が逆になるほどの大きな屈曲をしない。
- (3) 屈折率勾配が大きい水深の近傍を通過した光線が、大きな屈曲をして反転像の原因となる。

以上の結果から、先に述べた私たちの仮説は正しいと判断できる。

6. 参考文献

- | | | |
|---------------------|-----------|---------------|
| (1) 蜃気楼モデルと屈折率分布の研究 | 清水東高自然科学部 | 平成20年度理科研究論文集 |
| (2) 光の気象学 | 柴田 清孝 著 | 朝倉書店 |