

1 動機

2007年8月28日に皆既月食があることを知った私たちは、日頃目にする月がどのように変化するのかに興味を持ち、観測を行うことにした。また、皆既日食と同時に起こる水瓶座σ星の星食にも興味をもった。さらにこの星食について調べてみると星食の時刻から月と地球の距離を求めることができることを知った。そこで、その値が分かれば月の直径や質量なども計算できるのではないかと予想し、挑戦することにした。



写真 1-1 皆既月食と星食直前の水瓶座σ星 (中央下)

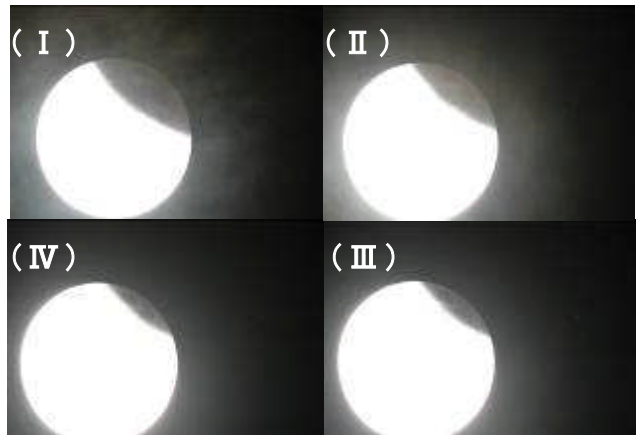


写真 1-2 月食の終わりごろの月

本校屋上天文台にて撮影 日時は
(I)2007年8月28日21時10分00秒
(II)同21時14分02秒
(III)同21時18分00秒
(IV)同21時19分02秒

2 目的

月食及び星食の写真撮影や動画撮影により、正確な水瓶座σ星の月への潜入・出現時刻を求める。次にこれらの時刻と万有引力やケプラーの法則から月の諸量を推定する。

3 方法

- (1) 15cm屈折望遠鏡に時刻をGPS時計にあわせたデジタル一眼レフカメラを装着し、月を1分毎に撮影する。図3-1上参照
- (2) 8cm屈折望遠鏡に高感度ビデオカメラを装着し、GPS時計の時刻を画面上に映し込みながら動画撮影を行い、動画データをパソコンに保存する。図3-1下参照
- (3) 画像処理ソフトや数式処理ソフトを用いて、水瓶座σ星の正確な潜入、出現時刻をもとめ、三角測量の原理を利用して月と地球の地心距離を求める。
- (4) (3)でもとめた月と地球の地心距離と月の公転周期・観測時の視直径より、万有引力や遠心力、ケプラーの法則を使って月の直径や質量などの諸量を求める。

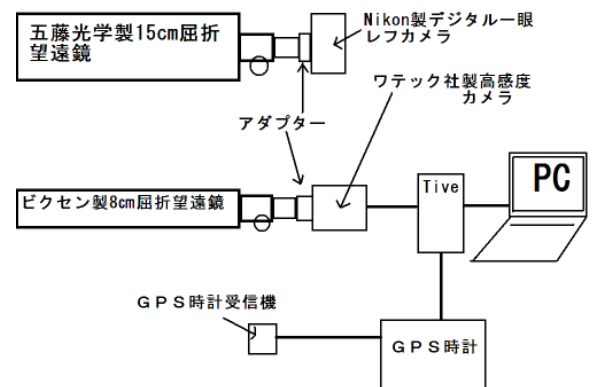


図 3-1 観測機器の構成

4 水瓶座σ星の出現時刻の推定

月と地球の地心距離や月の質量といった月の諸量を求めるためには水瓶座σ星の潜入と出現の正確な時間を求める必要がある。水瓶座σ星の潜入時刻はワテック高感度カメラの動画上の時刻から求められたが、出現時刻は水瓶座σ星の出現方向の予測を誤ったため求めることができなかった。そこでデジタル一眼レフカメラやビデオカメラのデータを天体画像処理ソフト「マカリ」等で合成し(図4-1)、次に単位時間当たりの水瓶座σ星の移動角度を求める

ことで、水瓶座σ星の出現時刻を算出した。結果は図4-2のとおりである。
 以上から、水瓶座σ星の潜入時刻・出現時刻は表4-1のとおりとなった。

表4-1 潜入時刻と出現時刻

潜入時刻	19時44分52.95秒
出現時刻	20時28分52.09秒

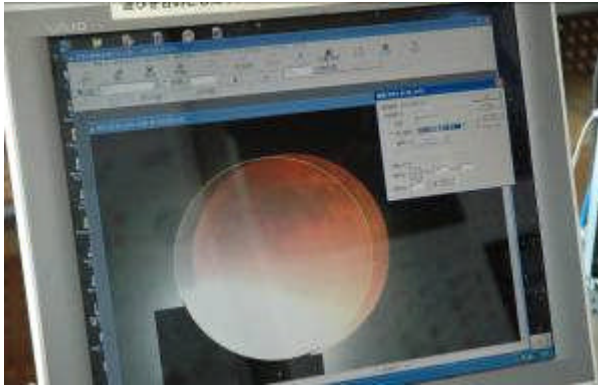


図4-1 「マカリ」を使った画像合成の様子

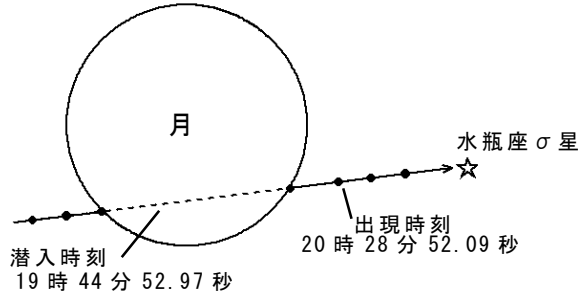


図4-2 潜入時間・出現時間と移動経路

5 月と地球の地心距離の推定

月と地球の地心距離推定の流れは、図5-1の通りである。推定は、図5-1のように地球と月とを線で結び、三角形を作った。このような求め方を三角測量という。三角測量には、まず、視差が必要である。視差とは、一点を2地点で観測をしたときの方向の差だが、今回は、1地点で観測をし、地球の自転を利用してσ星潜入時の月の位置と、σ星出現時の月の位置の方向の差から、視差を求めた。(図5-2参照)

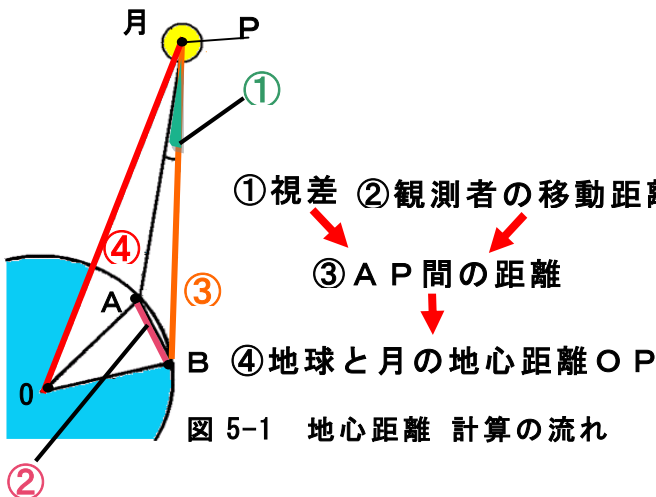


図5-1 地心距離 計算の流れ

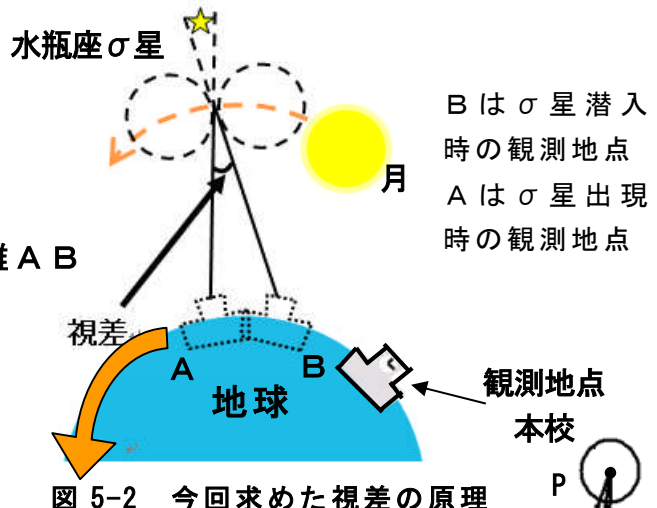


図5-2 今回求めた視差の原理

(1) 視差の算出

水瓶座σ星の潜入・出現時刻から、月は背景の恒星に対し
 $20時28分52.09秒 - 19時44分52.95秒$
 $= 43分59.14秒 = 43.99分$
 で月の視直径である 0.5379° の約64.14%、
 即ち $0.5379^\circ \times 64.14\% = 0.3451^\circ$
 0.3451度だけ移動している(図5-3参照)。
 月の公転速度は、公転周期が27.32日であること
 から1時間には
 $360^\circ \div 27.32 \div 24 = 0.5490^\circ$
 0.5490° 移動している。
 よって、43.99分間では
 $0.5490^\circ \times 43.99 \div 60 = 0.4025^\circ$
 0.4025° 移動している。
 月の公転の方向は地球の公転と同じ方向
 なので、両方の差をとって
 $0.4025^\circ - 0.3451^\circ = 0.05745^\circ$

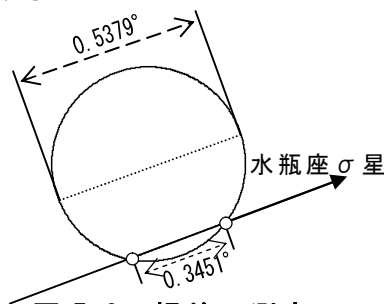


図5-3 視差の測定

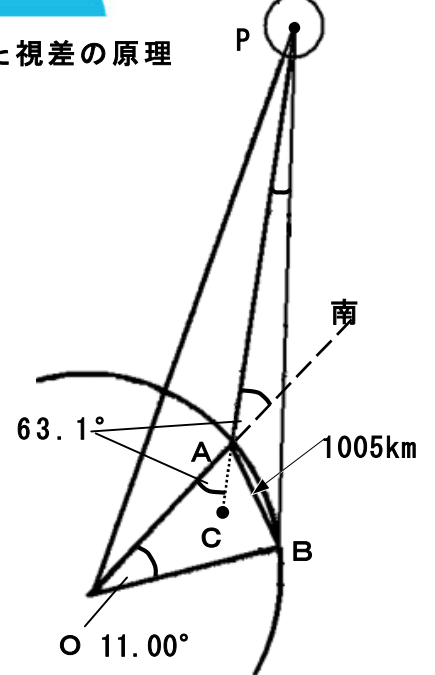


図5-4 観測者の移動距離

0.05745° が視差となる.

(2) 観測者の移動距離 A B

地球は 1 時間で 15° 自転するので 43.99 分間では

$$15^\circ \times 43.99 \div 60 = 11.00^\circ$$

11.00° 自転している.

また、地球の赤道半径は 6378Km, 観測地の緯度は 34° 43' 15" = 34.72°

より、

$$A B = 6378\text{Km} \times \cos 34.72^\circ \times \sin(11.00 \div 2)^\circ \times 2 = 1005\text{Km}$$

よって 1005Km 移動したことになる.

(3) A P 間の距離

星食が始まった 19 時 44 分 52.95 秒の月の位置は真南から東に 63.1° であったので図 5-4 のようになり, △ O A B は頂角が 11.00° の二等辺三角形なので,

$$\angle O A B = (180^\circ - 11.00^\circ) \div 2 = 84.50^\circ$$

$$\angle B A C = 84.50^\circ - 63.1^\circ = 21.40^\circ$$

$$\angle A B P = 21.40^\circ - 0.05745^\circ = 21.34^\circ$$

図 5-5 で A H を 2 通りの方法で等式を作ると

$$1005\text{Km} \times \sin 21.34^\circ = A P \text{ Km} \times \sin 0.05745^\circ$$

これより

$$A P = 1005\text{Km} \times \sin 21.34 \div \sin 0.05745^\circ = 364675\text{Km}$$

(4) 地球と月の地心距離 O P

△ P A O において、O P について余弦定理を用いると

$$O P^2 = 6378^2 + 364675^2 - 2 \times 6378 \times 364675 \times \cos 116.9^\circ$$

が成り立つので、これより、

$$O P = 367595\text{Km}$$

と求められる.

6 月の諸量の推定

月の諸量の求め方の流れは、図 6-1 の通りである.

(1) 質量の推定

月と地球は図 6-2 のように、共通重心を中心に回っている. ここで地球の質量を M, 月の質量を m, 共通重心と月の中心の間の距離を s, 地球・月間の中心からの平均距離を a とすると、共通重心から、地球と月までの距離はそれぞれの星の質量に反比例するため、次の式が得られる (図 6-2 参照).

$$M : m = s : a - s$$

これを -変形して、

$$s = M a / M + m$$

という式が得られる. また、月に働く万有引力を F とする表す

ことが出来る.

$$F = G M m / a^2$$

また、月に働く遠心力 F' は次の式で表すことが出来る.

$$F' = 4 \pi m s / P^2$$

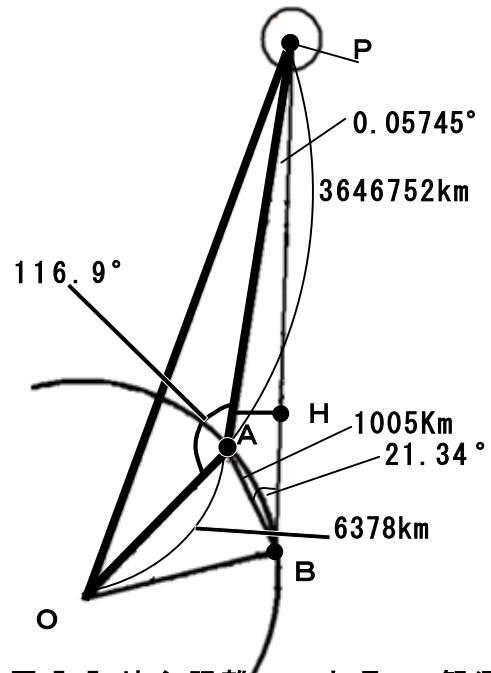
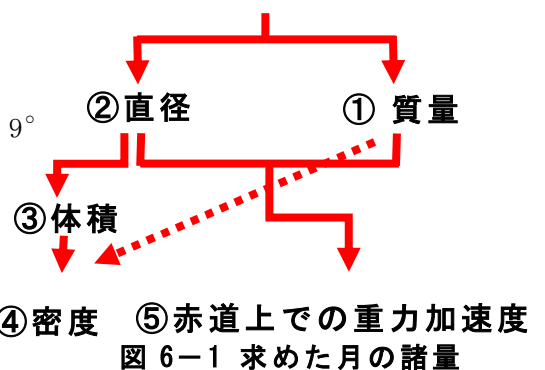


図 5-5 地心距離 O P と月 P, 観測点 A, B の関係

地球と月の地心距離



④密度 ⑤赤道上での重力加速度
図 6-1 求めた月の諸量

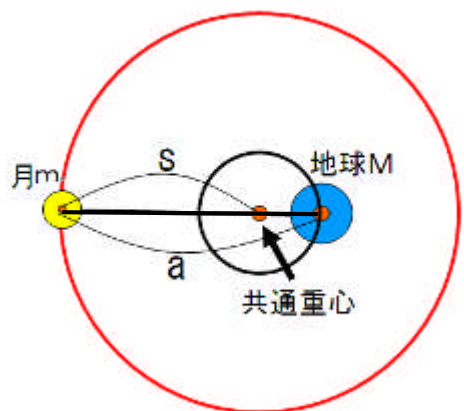


図 6-2 地球と月の位置関係
(注) 共通重心は地球の中心に極めて近い位置にあるが、説明の為に月側にずらしてある.

万有引力(F)=遠心力(F')なので、等号で繋ぐと右のようになる。

$$GMm/a^2=4\pi ms/P^2$$

これに、sを代入して解くと、

$$m=(4\pi^2 a^3/GP^2)-M$$

の式が得られる。この式のうちG、πは定数であるので、公転周期P、軌道長半径a、地球の質量Mが分かれば、月の質量mを推定できる。

そこで、文献から、月の平均公転距離である a=384400Km、公転周期 P=27.32日、地球の質量 M=5.9742×10²⁴kgの値を求めた。これらの値を質量推定の式に代入したところ、

$$m=(4\times\pi^2\times384400000^3/6.67\times10^{-11}\times27.32\times360\times24)-5.9742\times10^{24}$$

$$=5.96591\times10^{22}\text{kg}$$

となった。

公表値 7.3476×10²²kgとの誤差は0.7065%である。

(2) 直径の推定

5月と地球の地心距離の推定より、

8月28日の月の地心距離=367595Km

$$\text{視直径}=32' 16.6''=32.268'$$

であることがわかった。

また、月の視直径は小さく、月の公転の軌道を半径の大きな円と見ることができるので図6-2より月の円軌道の一部を直線で近似できる。よって月の直径をxKmとすると、

$$\text{円周の長さ(Km)}:x(\text{Km})=360\times60':\text{視直径}$$

上の式が得られる。

この式に視直径、月の地心距離の値を代入すると、

$$2\times\pi\times367595:x=360\times60':32.268'$$

となり、これを解くと

$$x=3450.42\text{Km}$$

公表値は3474.8Kmより誤差は0.7065%である。

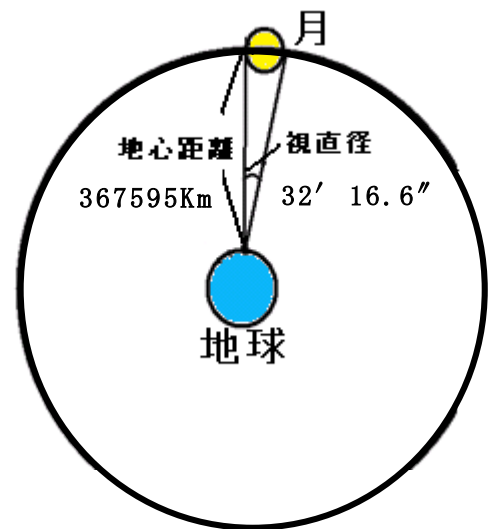


図6-4 月の直径推定の方法

(3) 体積の推定

月を球とみなすと、体積Vは次の式で表すことができる。

$$V=4/3\pi r^3$$

この式に、先ほど求めた直径を半径に直し、rに代入すると、

$$V=\{4\times\pi\times(3450.4212\div2)^3\}\div3$$

$$=2.1509\times10^{10}\text{Km}^3$$

になる。

公表値 2.199×10¹⁰Km³より、誤差は2.19%である。

(4) 密度の推定

密度の推定には、先ほど求めた質量と体積を使う。

1立方センチメートルあたりの密度Dを求めると

$$D=m\div V$$

$$=(5.96591\times10^{22}\text{kg}\times1000)\div(2.1509\times10^{10}\text{Km}^3\times10^{15})$$

$$=2.7737\text{g/cm}^3$$

となる。

公表値 3.34g/cm³との誤差は16.98%である。

(5) 赤道上で重力加速度の推定

万有引力の法則より、月の赤道上で質量m(kg)の物体Aに働く引力F(N)は月の半径をR(m)、月の質量をM(kg)万有引力定数をGとすると

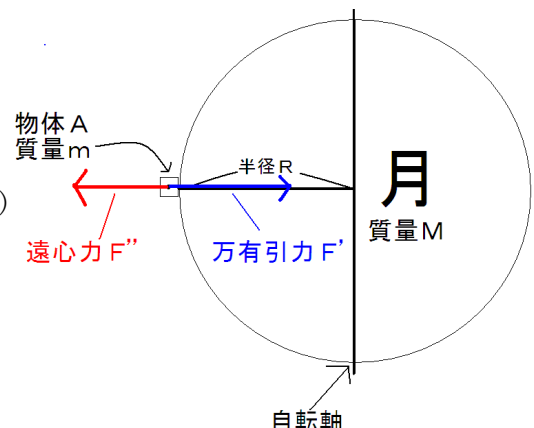


図6-5 月の重力推定の方法

$$F' = GMm/R^2$$

とあらわせる. また, 物体Aには同時に引力とは逆方向に遠心力 F'' が働いており, それは月の自転の角速度を ω とすると,

$$F'' = -mR\omega^2$$

とあらわせる. よって月の赤道上での物体Aに働く重力は引力 F と遠心力 F'' の合力なので
重力 = $F' - F''$ (N)

となる. この式に公表値より求めた月の質量 M , 我々の求めた月の半径 R と, 角速度 ω を代入すると 1.2968m (N) となり公表値 1.622m (N) との誤差は 20% であった.

7 結果・考察

表 7-1 は, 今回の結果のまとめである.

表 7-1 今回もとめた月の諸量

月の諸量	計算結果	公表値	誤差 (%)
当日の月と地球の地心距離	367595Km	368500Km	0.25
月の平均距離		384400Km	
月の直径	3450.4Km	3474.8Km	0.71
月の質量	5.9659×10^{22} kg	7.3476×10^{22} kg	19.54
月の体積	2.15×10^{10} Km ³	2.2×10^{10} Km ³	2.19
月の密度	2.77g/cm ³	3.34g/cm ³	16.98
月の重力加速度	1.297m/s ²	1.622m/s ²	20.00

月の直径の誤差は, 円周の一部を直線と近似したためだと考えられる. 重力の大きさ, 密度は誤差が大きく出てしまったが, これは公表値をもとにもとめた質量のずれに起因していると考えられる. なお, 質量のずれについては質量推定の式は月と地球に当てはめた場合, 地球の質量が月のそれと比べて大きすぎるために共通重心と地球の中心の距離が近すぎることで, 月の重心と中心が大きくずれていることが原因と考えられる.

8 今後の課題

今後の課題は以下の 4 つである.

- (1) 共通重心と地球の中心が地球・月間の距離に比べてとても小さいためより正確に質量を求める方法を考えたい.
- (2) 月は円軌道でなく, 楕円軌道で公転しているので, その軌道を求めてみたい.
- (3) 楕円軌道をもとにして月の質量を推定したい.
- (4) 月の直径を求める際, 地球・月間の距離は小さく, 円弧を直径として近似できない可能性があるため, より正確な計算方法を考えたい.

9 参考文献

天文観測年表編集委員会(2006)天文観測年表 2007, 地人書館 p253

天文観測年鑑編集委員会(2006)天文観測年鑑 2007, 誠文堂新光社 p343

フリー百科事典ウィキペディア

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A1%E3%82%A4%E3%83%B3%E3%83%9A%E3%83%BC%E3%82%B8>

A s t r o A r t s <http://www.astroarts.co.jp/>

海上保安庁海洋情報部ホームページ <http://www1.kaiho.mlit.go.jp/>