

5 クラードニの図形

1 研究の動機

正方形の薄い鉄板の中心部を万力でしっかりと固定し、鉄板の上に砂や鉄粉などの細かい粒をまく。一边を弦で振動させると砂粒が動き出して不思議な模様ができる。この模様を「クラードニの図形」という。私たちは、弦の代わりに電磁石を使うことによって、いろいろな振動数の振動をさせ、多くの模様をつくり、振動数と模様の関係を見出そうと思い研究を始めた。なお、本年度の本校文化祭において3年理数科有志の方がこの研究を発表しており、その論文を参考にした。ただし、先生より正方形の理論はまだ良くわかっていないと聞いたので、円形の薄い鉄板でやることにした。

2 研究の方法

(1) 材料・実験器具

円形板は直径30cm、厚さ1mm、質量550gの鉄板を用いた(図1)。電磁石は物理室にあった先生手作りのを用いた(図2)。細かい粒として食卓塩を用いた(図3)。ただし、塩は鉄板や器械に付いたままにしておくと水分を吸って金属をさびらせるので、実験終了後は念入りの掃除が必要である。

低周波発信器(30Hz~300KHz)(図4)、増幅器、振動数の測定用にオシロスコープ(図5)を用いた。

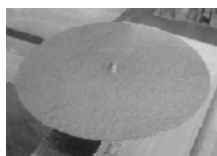


図1



図2



図3



図4



図5

(2) 実験手順

図6



ア 図6のようにセットし、振動数を変えていく。共振すると大きな音になり、塩が鉄板の上を跳ね上がり振動しない部分に塩が集まってくるので、模様ができる。その模様をデジタルカメラで写真を撮る。

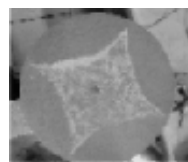
イ 低周波発信器の振動数の目盛りでは正確な振動数がわからないので、オシロスコープで発信器の正弦波の波形を読み取って振動数を割り出す。なお、実際に振動する鉄板の振動数は、発信器の振動数の2倍である。なぜなら、鉄板は電磁石のN極でもS極でも引かれるからだ。

ウ 高い振動数になると増幅器のボリュームを上げないと共振しない。また、電磁石を鉄板ぎりぎりまで近づける必要もある。

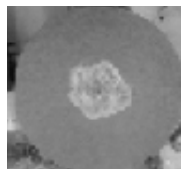
3 結果



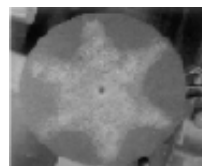
86.8Hz



98Hz



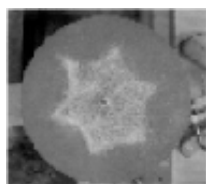
222Hz



238Hz



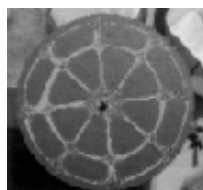
256Hz



434Hz



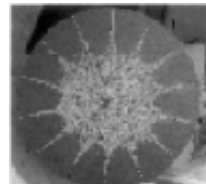
2778Hz



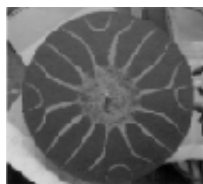
3224Hz



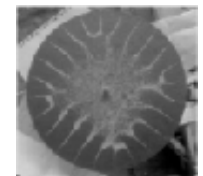
588Hz



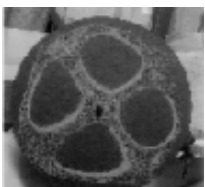
714Hz



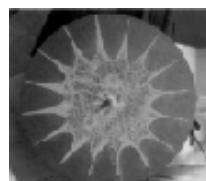
3334Hz



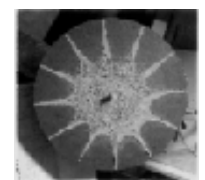
3846Hz



770Hz



910Hz



1052Hz



1176Hz



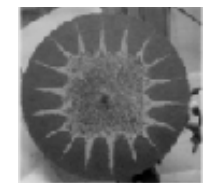
1633Hz



1905Hz



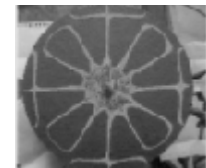
2128Hz



2272Hz



2500Hz



2702Hz

4 理論

鉄板の振動というのは、水面や太鼓の振動と同じ横波である。ただ、太鼓の膜と違って鉄板は非常に硬いので、膜は引っ張っているのが張力が関係するが、鉄板は横ずれを元の戻そうとする力「剛性力」といわれるものが関係しているらしい。そして、電磁石が振動源となり、横波が鉄板を伝わるのであるが、円の縁に到達すると反射する。その反射波どうしの重ね合わせによって振動が打ち消しあう部分（節とよぶ）とよく振動する部分（腹とよぶ）とができ、節に沿って塩が集まるので節の線の模様ができてほしいが、鉄板の模様については数式ができていないらしい。

しかし、機械工学便覧によると共振する振動数については以下のような数式がある。

中心を固定された周辺自由の円板の共振振動数

f [Hz] は

$$f^2 = \frac{\mu}{16\pi^2} \frac{t^2 E}{r^4 \rho} \quad \therefore f = \frac{t}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{\mu E}{\rho}} \quad (4-1)$$

である。ただし、板の厚さ t [m]、半径 r [m]、鉄のヤング率 E [N/m²]、鉄の密度 ρ [kg/m³] である。 μ とは模様の節直径数、節円数で決まる定数である。以下の表1ようになる。節直径数、節円数に対応する模様は表2 になる。

節直径数 節円数	0	1	2	3
0	5.16		10.61	56.87
1	160.2	154.3	443.9	1040
2	1349	1222	2624	4285
3	5250	5266	8574	13287

表1 中心を固定した円板の μ の値（機械工学便覧より）

節直径数 節円数	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

表2 節直径数、節円数に対応する模様（節の線の模様）

本実験で使用した円板の板の厚さ $t = 1.0 \times 10^{-3}$ [m]、半径 $r = 0.15$ [m]、鉄のヤング率 $E = 2.0 \times 10^{11}$ [N/m²]、鉄の密度 $\rho = 7.87 \times 10^3$ [kg/m³]である。これらを(4-1)式に代入すると

$$f = 17.84 \times \sqrt{\mu} \quad (4-2)$$

となり、共振振動数は表3のようになるはずだ。

節直径数 節円数	0	1	2	3
0	40.5		58.1	134.5
1	225.0	221.6	375.9	575.3
2	655.2	623.6	913.9	1167.8
3	1292.6	1294.6	1651.9	2056.4

表3 本実験で使用した円板の共振振動数(理論値)単位はHz

5 模様の分類

結果の写真より、節直径数、節円数に対応する模様は表4に示したように8種類できた。また、そのときの振動数は表5に示した。

		2	3	4	5
1					
2					

表4 結果より節直径数、節円数に対応する模様の写真

節直径数 節円数	1	2	3	4	5
1	256	770	1176	1633	2128
2		1905	2500	3224	

表5 結果より節直径数、節円数に対応する模様の振動数(測定値)単位はHz

6 考察と展望

- (1) 節直径数、節円数に対応する模様の振動数の理論値と測定値を比べると、全く一致していない。近いものさえない。表1の中心を固定した円板の μ の値における節直径数、節円数の意味を誤解しているのかもしれない。また、節直径数0、節円数0とは、どんな模様なのか。
- (2) 節直径数、節円数に対応する模様以外に、共振したときの模様はいろいろとあるが、これはどのような数式で表されるのか。
- (3) 振動数が低いときには太い線で単純な模様、高くなるほど、線が細く、模様が複雑になっていく。
- (4) 節直径数1、節円数2の模様・節直径数5、節円数2の模様・節円数3の模様は作ることができなかった。わずかな振動数の違いで大

きく模様が変わるので、見落としがあったかもしれない。また、発信器のダイヤルのわずかな回転で振動数が大きく変わってしまうので、全ての振動数を網羅できていなかったのかもしれない。

- (5) 鉄板以外にベニヤ板やプラスチックの板など素材が違うものだとどうなるか。今後の展望としたい。また、半径や厚さを変えたらどうなるかも挑戦したい。

7 参考文献

静岡県立韮山高等学校 理数科3年有志 論文
「クラードニの図形」
理化学辞典 第5版 岩波書店
機械工学便覧
振動・波動 有山正孝 著 裳華房